## ТЕМА 1. Системы линейных уравнений.

1. Матрицы и действия с ними.
2. Определители и их основные свойства.
3. Методы решения систем линейных уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов.-5-е изд., стер. -М.: Физматлит, 2002. – 317 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: - М.: Физматлит, 2003. – 303 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов / ред. Ефимов Н. В. – 17-е изд., стер. – СПб: Профессия, 2001. – 199 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов: в 3т.-5-е изд., стер.-М.:Дрофа.- (Высшее образование. Современный учебник). т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-2003.-284 с.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я -6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.1. -2002.-304 с.


## Решение типового варианта контрольной работы.

**Задача 1.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

**Решение.** Для вычисления определителя третьего порядка будем использовать известную формулу Саррюса (правило треугольников), которое может быть записано следующей формулой:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*5*9 + 7*6*2 + 3*8*4 - 7*5*3 - 9*4*2 - 1*8*6 = 0$$

**Ответ: 0.**

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**Решение:**

Решим систему матричным способом, для этого вычислим обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$, где $A_{ij}$ - алгебраические дополнения к элементам матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\Delta A=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=6-2+5-1+10-6=12\neq 0$ - матрица невырожденная.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(10-2)=-8$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5-1=4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(-2-1)=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3+1)=-4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2-1=-3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(6-5)=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3+5=8$$

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -8 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 8\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -8 & 5 & -1\\ 4 & -4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\cdot 12 & 3\cdot 3 & (-3)\cdot 3\\ -8\cdot 12 & 5\cdot 3 & (-1)\cdot 3\\ 4*12 & (-4)\cdot 3 & 8\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\ -84\\ 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -7\\ 5\end{pmatrix}$$

Решим систему методом Крамера. Главный определитель системы:

$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$. Разложим определитель по элементам первой строки, пользуясь формулой $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=12\neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

**Ответ:** $(0; -7; 5)$

Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + \frac{5}{4} x_3 = -\frac{3}{4} \\ -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Выполним решение по действиям.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&4&5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*1+2*1+3*2 & 1*2+2*1+3*4 & 1*3+2*3+3*5\\1*1+1*1+3*2 & 1*2+1*1+3*4 & 1*3+1*3+3*5\\2*1+4*1+5*2 & 2*2+4*1+5*4 & 2*3+4*3+5*5\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}9&16&24\\8&15&21\\16&28&43\end{pmatrix}.$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&3\\3&3&9\\6&5&15\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&4&5\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&16&24\\8&15&21\\16&28&43\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&6&3\\3&3&9\\6&5&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10&21\\5&12&12\\10&23&28\end{pmatrix}$$

**Ответ:** $\begin{pmatrix}0&10&21\\5&12&12\\10&23&28\end{pmatrix}$.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Если $A_{m\times n}=(a_{ij})$, $B_{n\times p}=(b_{jk})$, то произведением матрицы $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$, такая, что $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}$, где $i=(\overline{1,m})$, $k=(\overline{1,p})$.

Пример: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$

Произведение $A\cdot\text{B}$ не определено, так как число столбцов матрицы $A$ (3) не совпадает с числом строк матрицы $B$ (2).

Произведение $B\cdot A$ определено.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0\\1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2+3&1+0\\1+6&2+2&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&1\\7&4&1\end{pmatrix}$$