ТЕМА 10. Ряды.

1. Числовые ряды.
2. Функциональные ряды.
3. Степенные ряды.
4. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.
5. Ряды Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

<u>Пример 1</u>. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2.$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}.$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n.$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}.$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^7}+n}$.

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3}+5}$.

Решение.

а) В данном случае $a_n = \left(\dfrac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{100}\right)^2 \neq 0.$

Следовательно, ряд расходится.

б) Поскольку в записи общего члена ряда есть показательная функция 3^n, то используем признак Даламбера.

Для рассматриваемого ряда

$$a_n = \frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)} : \frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot((n+1)+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-4(n+1)+5}{n^2-4n+5}\cdot\frac{3^n\cdot(n-1)}{3^{n+1}\cdot((n+1)+1)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

в) Так как в записи общего члена ряда есть факториал ($n!$), то используем признак Даламбера. Для исследуемого ряда

$$a_n = \frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)};\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}\cdot(2(n+1)+3)}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{5^{n+1}\cdot(2(n+1)+3)} : \frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}}\cdot\frac{2n+3}{(2(n+1)+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!\cdot 5} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5} = \infty.$$

В пределе получили бесконечность, следовательно, исследуемый ряд расходится.

г) Воспользуемся радикальным признаком Коши. Здесь $a_n = \left(\dfrac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} > 1.$$

Полученное значение больше 1, следовательно, ряд расходится.

д) Исследуем данный ряд с помощью интегрального признака Коши. Составим соответствующий интеграл и вычислим его

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}dx = \left|\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{1}{x}dx \\ x=2\Rightarrow t=\ln 2 \\ x=b\Rightarrow t=\ln b \end{array}\right| = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln b}\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

е) Составим ряд, эквивалентный исходному, оставив в числителе и знаменателе лишь старшие степени n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/2}}{n^{7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/3-1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{11/6}}.$$

Полученный ряд эквивалентен исходному, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{2\sqrt[3]{n^7}+n} : \frac{1}{n^{11/6}} = \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty$$

Таким образом, исходный ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{11/6}}$ сходятся и расходятся одновременно. Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{11/6}}$ $\left(\dfrac{11}{6}>1\right)$ сходится, следовательно, исходный ряд также сходится.

ж) Так как $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/2}}{n^{4/3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/6}}$ расходится $\left(\dfrac{5}{6}<1\right)$, следовательно, исходный ряд также расходится.

з) Оценим общий член ряда:

$$0<\sin^2 n<1 \quad\Rightarrow\quad 0<\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+5}}<\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\left(\frac{3}{2}>1\right)$, следовательно, эквивалентный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$ также сходится. Т.к. из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, то исходный ряд сходится.

<u>Пример2.</u> Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(x-2)^n n^3}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}}{|x-2|^{n+1}\cdot(n+1)^3} : \frac{(n+1)\cdot 3^n}{|x-2|^n\cdot n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}\cdot|x-2|^n\cdot n^3}{(n+1)3^n\cdot|x-2|^{n+1}\cdot(n+1)^3} = \frac{3}{|x-2|}.$$

Ряд сходится, если $\frac{3}{|x-2|}<1 \Rightarrow |x-2|>3$

$x-2>3$ или $x-2<-3$;
$x>5$ или $x<-1$,
$x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Ряд расходится, если $\frac{3}{|x-2|}>1 \Rightarrow x\in(-1;5)$.

Неопределенный случай: $\frac{3}{|x-2|}=1$, т.е. $x=5$ или $x=-1$,

Пусть $x=5$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^n n^3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^3}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{n^3}$ сходится как эквивалентный сходящемуся ряду.

Пусть $x=-1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{(-3)^n n^3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^3}$.

Этот ряд – знакочередующийся. Исследуя его на абсолютную сходимость (рассматриваем ряд, состоящий из абсолютных величин), получим ряд как и при $x=5$, а он сходится. Т.к. ряд, состоящий из абсолютных величин, сходится, то данный ряд сходится абсолютно.

Получили, что $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$ - область сходимости ряда.

<u>Пример 3.</u> Вычислить с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ интеграл $\int\limits_0^1 x\cdot\sin\sqrt{x}dx$.

Решение. Запишем разложение функции $y=x\cdot\sin\sqrt{x}$ в ряд Маклорена:

$$\sin\sqrt{x}=\left|t=\sqrt{x}\right|=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}-\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{1!}-\frac{\sqrt{x^3}}{3!}+\frac{\sqrt{x^5}}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$x\sin\sqrt{x}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!}+\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}+1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 x\cdot\sin\sqrt{x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!}+\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{3!\cdot\frac{7}{2}}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{5!\cdot\frac{9}{2}}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}+1}}{(2n-1)!\ \left(\frac{2n+1}{2}+1\right)}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6\cdot\frac{7}{2}}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\frac{9}{2}}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\frac{11}{2}}-\ldots=$$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{21}+\frac{1}{540}-\frac{1}{27720}-\ldots\approx\frac{2}{5}-\frac{1}{21}+\frac{1}{540}\left(\pm10^{-3}\right)=$$

$$=\frac{1512-180+7}{3780}=\frac{1339}{3780}=0{,}354\left(\pm10^{-3}\right).$$

Заметим, что при вычислении интеграла получаем знакочередующийся ряд. Мы отбрасываем при вычислении все слагаемые, начиная со слагаемого, меньшего по абсолютной величине заданной точности $\left(\frac{1}{27720}<10^{-3}\right)$.

<u>Пример 4</u>. Найти три первые (отличные от 0) члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши $y'-e^{-x}y=2x,\quad y(0)=1$.

Решение.

Для представления решения в виде ряда Маклорена необходимо найти первые три отличные от нуля значения $y(0),\quad y'(0),\quad y''(0),\ldots$. По условию задачи $y(0)=1$.

Выразим из уравнения y':

$$y'=e^{-x}y+2x; \qquad (*)$$

$$y'(0)=e^{-0}\cdot1+2\cdot0=1.$$

Найдем y'', продифференцировав обе части равенства $(*)$ по x:

$$y''=(e^{-x}y+2x)'=-e^{-x}y+e^{-x}y'+2;$$

$$y''(0)=-e^{-0}\cdot1+e^{-0}\cdot1+2=2.$$

Окончательно получим:

$$y=1+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{2}{2!}x^2=1+x+x^2.$$

<u>Пример 5</u>. Разложить данную функцию в ряд Фурье а) $f(x)=\begin{cases}1\ ; & -2<x\le 0\\ x\ ; & 0<x<2\end{cases}$ в интервале (-2, 2):

б) $f(x)=\begin{cases}x\ ; & 0\le x\le \pi/2\\ \pi-x\ ; & \pi/2\le x\le \pi\end{cases}$ по синусам на интервале $[0,\ \pi]$.

Решение.

Разложение периодической (период $2l$) функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{l};$$

а) В нашем примере l=2.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\frac{\pi x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\frac{\pi x}{2}; \qquad (**)$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ \ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos k\frac{\pi x}{2}dx;$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin k\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}1dx+\int_{0}^{2}xdx\right)=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}(2+2)=2$$

$$a_k=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}\cos\frac{k\pi}{2}xdx+\int_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{k\pi}{2}xdx\right)$$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$$\int_{-2}^{0}\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=0\,;$$

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix}V=x; & V'=1\\ U'=\cos\frac{k\pi x}{2}; & U=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}-\int_{0}^{2}\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}dx=$$

$$=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2(\cos k\pi-\cos 0)=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left((-1)^k-1\right);$$

$$a_k=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2((-1)^k-1)=\frac{2}{(k\pi)^2}((-1)^k-1)\,.$$

$$b_k=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}\sin\frac{k\pi x}{2}dx+\int_{0}^{2}x\cdot\sin\frac{k\pi}{2}xdx\right)$$

Вычислим значения интегралов-слагаемых по отдельности.

$$\int_{-2}^{0}\sin\frac{k\pi}{2}xdx=\frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0}=\frac{-2}{k\pi}(\cos 0-\cos(-k\pi))=-\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

Аналогично предыдущему

$$\int_0^2 x\sin\frac{k\pi}{2}x dx = \begin{vmatrix} V = x; \quad V' = 1 \\ U' = \sin\frac{k\pi}{2}x; U = \frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}xdx = -\frac{2}{k\pi}\left(2\cdot\cos k\pi - 0\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 = -\frac{4\cdot(-1)^k}{k\pi}$$

и окончательно получим:

$$b_k = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{k\pi}+\frac{2}{k\pi}(-1)^k - \frac{4}{k\pi}(-1)^k\right) = -\frac{1}{k\pi}-\frac{(-1)^k}{k\pi}$$

Подставляя полученные значения a_0, a_k, b_k в разложение $(**)$, получим:

$$f(x) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k\pi}-\frac{(-1)^k}{k\pi}\right)\sin\frac{k\pi x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k\pi)^2}\left((-1)^k-1\right)\cos\frac{k\pi x}{2} =$$

$$= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\left((2m+1)\pi\right)^2}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}$$

б) Продолжим функцию на отрезок $[-\pi,\ 0]$ нечетным образом (рис. 1).

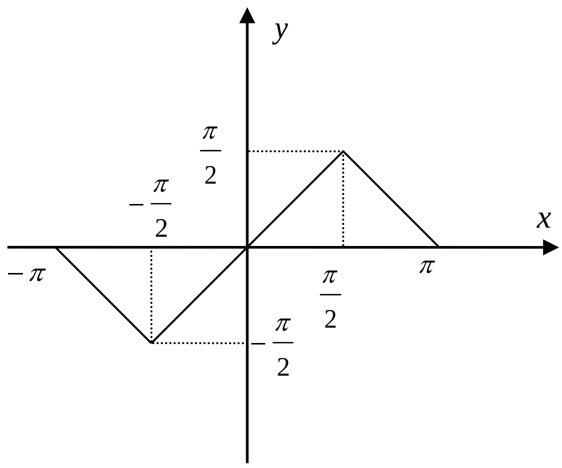

Рис. 1

Тогда получим нечетную функцию, ряд Фурье которой содержит только синусы, т.е. $a_0 = a_k = 0$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx;$$

Найдем коэффициенты b_k, используя формулу:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\ dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin kx\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cdot\sin kx\ xdx\right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\sin kx\ dx+\frac{2}{\pi}\cdot\pi\left(\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin kx\ dx\right)-\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\cdot\sin kx\ xdx=$$

Для вычисления первого и третьего интегралов используем метод интегрирования по частям:

$$=\left|\begin{matrix} V=x; \quad V'=1 \\ U'=\sin kx; \ U=-\dfrac{1}{k}\cos kx \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cdot\cos kx}{k}\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi/2}\cos kx\ dx\right)+2\left(-\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cdot\cos kx}{k}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}+\frac{1}{k}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos kx\ dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cdot\cos\frac{\pi k}{2}}{2k}+\frac{\sin kx}{k^2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right)+2\left(-\frac{\cos k\pi}{k}+\frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{k}\right)-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cdot\cos k\pi}{k}+\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi k}{2}}{k}+\frac{\sin kx}{k^2}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4\sin\frac{\pi\cdot k}{2}}{\pi\cdot k^2}=\begin{cases} 0, & k=2n \\ \dfrac{4\cdot(-1)^{n+1}}{\pi\cdot(2n-1)^2}, & k=2n-1 \end{cases}.$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.