ТЕМА 11. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы.

1. Случайные события.
2. Случайные величины.
3. Элементы математической статистики.
4. Цепи Маркова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов – 10-е издание, стереотипное – Москва: Высшая школа, 2003. - 479 с.
2. Гмурман В.Е Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для вузов.- 9-е издание, стереотипное – Москва: Высшая школа, 2004.- 404 с.
3. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов – 2-е издание, переработанное и дополненное – Москва: ЮНИТИ, 2003. -352 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

Задача 1. Бросается 4 монеты. Какова вероятность того, что три раза выпадет «решка»?

Решение. Подбрасывание монеты будем считать одним опытом. По условию задачи производится 4 одинаковых испытания. Вероятность успеха (выпадение «решки») в каждом испытании равна $p = 0.5;\quad q = 1 - p = 0.5$. Требуется найти, что среди проведенных испытаний будет $k = 3$ успешных. Для решения задачи воспользуемся формулой биномиального закона распределения дискретной случайной величины. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В условиях нашей задачи $P_4(3) = C_4^3 0.5^3 0.5^{4-3} = 4 * 0.5^4 = 0.25$.

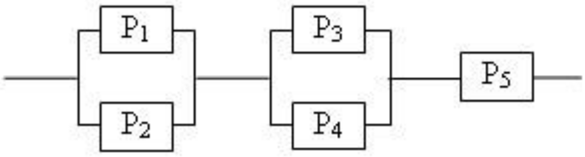
Ответ: 0.25.

Задача 2. В квадрат со стороной 2 вписан квадрат, вершины которого лежат на серединах сторон большего квадрата. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в больший квадрат точка попадет в маленький квадрат.

Решение. Воспользуемся понятием геометрической вероятности. Будем искать вероятность попадания в меньший квадрат как отношение площади меньшего квадрата к площади большего квадрата. $P = \frac{S_m}{S_b}\ S_b = 2^2; S_m = \sqrt{2}^2 \to P = \frac{2}{4} = 0,5$.

Ответ: $P = 0,5$.

Задача 3. Определить надежность схемы, если P_i – надежность i – го элемента



Решение. Разобьем цепь на три последовательно соединенных блока. И вычислим надежность каждого блока отдельно. Первый блок пропускает электрический ток в трех случаях: если исправен первый элемент и неисправен второй; если исправен второй элемент и неисправен первый; и если оба элемента исправны. Таким образом, надежность этого блока может быть представлена суммой: $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)+p_1p_2$. Однако проще надежность этого элемента вычислить через вероятность противоположного события. Вычислим вероятность того, что блок не пропускает ток и надежность найдем по формуле вероятности противоположного события. Блок не исправен только в случае когда и первый и второй элементы неисправны: $(1-p_1)(1-p_2)$, следовательно, надежность блока может быть вычислена как разность: $1-(1-p_1)(1-p_2)$. Аналогично вычисляется надежность второго блока: $1-(1-p_3)(1-p_4)$. Теперь, зная надежности трех последовательно соединенных блоков, вычислим надежность цепи в целом. Схема пропускает ток только если все три блока исправны, то есть надежность схемы: $(1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4))p_5$.

Ответ: $(1-(1-p_1)(1-p_2))(1-(1-p_3)(1-p_4))p_5$.

Задача 4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины Y. Определить значение x и вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины Y.

Y	5	6	7	10
p	0,1	0,1	x	0,3

Решение. Найдем значение x из условия $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad 0{,}1+0{,}1+x+0{,}3=1 \Rightarrow x=0{,}5$.

Зная x, становится возможным вычисление математического ожидания.

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{n} Y_i p_i = 5*0{,}1+6*0{,}1+7*0{,}5+10*0{,}3=7{,}6$$

Ответ: $x=0{,}5; \quad M(Y)=7{,}6.$

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания ***m*** нормального закона с надежностью 0.95; зная выборочную среднюю $\overline{X}=75{,}17; n=36; \sigma=6$.

Решение. Построить доверительный интервал с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - 2\delta$ для математического ожидания ***m*** произвольной случайной величины можно следующим образом:

$$\bar{X} - U_\delta \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{X} + U_\delta \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

При надежности γ=0,95 найдем табличное значение $U_\delta = 1{,}6$ и запишем выражение, подставив значения из условия задачи:

$$75{,}17 - 1{,}96\frac{6}{\sqrt{36}} \le m \le 75{,}17 + 1.96\frac{6}{\sqrt{36}},$$

$$73{,}21 \le m \le 77{,}13.$$

Ответ: $73{,}21 \le m \le 77{,}13$.

Задача 6. Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за три шага $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

В каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из состояния *i* в состояние *j*), которые образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad (i = 1,2,\ldots,k).$$

Обозначим через $p_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате *n* шагов (испытаний) система перейдет из состояния *i* в состояние *j*. Например $p_{25}(10)$- вероятность перехода из второго состояния в пятое за десять шагов. Отметим, что при *n=1* получаем переходные вероятности $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Перед нами поставлена задача: зная переходные вероятности p_{ij}, найти вероятности $p_{ij}(n)$ перехода системы из состояния *i* в состояние *j* за *n* шагов. Для этого введем промежуточное (между *i* и *j*) состояние *r*. Другими словами, будем считать, что из первоначального состояния *i* за *m* шагов система перейдет в промежуточное состояние *r* с вероятностью $p_{ir}(m)$, после чего, за оставшиеся *n-m* шагов из промежуточного состояния *r* она перейдет в конечное состояние *j* с вероятностью $p_{rj}(n-m)$. По формуле полной вероятности получаем:

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m) p_{rj}(n-m).$$

Эту формулу называют равенством Маркова. С помощью этой формулы можно найти все вероятности $p_{ij}(n)$, а, следовательно, и саму матрицу P_n. Так как матричное исчисление ведет к цели быстрее, запишем вытекающее из полученной формулы матричное соотношение в общем виде $P_n = P_1^n$.

Вычислим матрицу перехода цепи Маркова за три шага, используя полученную формулу:

$$P(3) = P^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,28 & 0,72 \\ 0,27 & 0,73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,272 & 0,728 \\ 0,273 & 0,727 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0,272 & 0,728 \\ 0,273 & 0,727 \end{pmatrix}$.

Задача 7. DX = 3. Используя свойства дисперсии, найдите D(4X-2).

Решение. $D(AX + B) = A^2 D(X) \to D(4X - 2) = 4^2 D(X) = 16 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48.

Задача 8. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя компьютерами поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если заняты все три компьютера, то вновь поступающий заказ не принимается и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0.25 (з/час). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Решение. В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов – так называемый *процесс гибели и размножения*. Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, ..., S_k$. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}. В предположении, что все потоки событий, переводящие систему из одного состояние в следующее простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$, для отыскания предельных вероятностей, можно использовать систему уравнений Колмогорова для стационарных процессов. Правило для составления уравнений Колмогорова звучит следующим образом: слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-ое состояние на вероятности тех состояний, из которых эти потоки выходят. Поток заявок характеризуется интенсивностью λ (заявок/час), поток обслуживания – интенсивностью μ (заявок/час). Согласно условию задачи $\lambda = 0.25$ (заявок/час), $\mu = 1/t = 1/3 \approx 0.33$ (заявок/час). В нашей задаче система массового обслуживания может находиться в одном из четырех состояний: S_0 - когда все три компьютера свободны; S_1 - когда загружен работой только один компьютер; S_2 - когда заняты два компьютера; S_3 - когда все компьютеры заняты. В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\mu + \lambda) p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ (2\mu + \lambda) p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \\ 3\mu p_3 = \lambda p_2 \end{cases}.$$

К этой системе добавляется нормировочное уравнение $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$$\begin{cases} 0.25 p_0 = 0.33 p_1 \\ 0.58 p_1 = 0.25 p_0 + 0.66 p_2 \\ 0.91 p_2 = 0.25 p_1 + 0.99 p_3 \\ 0.99 p_3 = 0.25 p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$p_0 = 0.476;\ p_1 = 0.357;\ p_2 = 0.134;\ p_3 = 0.033$.

То есть в стационарном режиме работы вычислительного центра в среднем 47,6% времени нет ни одной заявки, 35,7% - имеется одна заявка, 13,4% - две заявки и 3,3% времени – три заявки (заняты все вычислительные мощности).

Вероятность отказа в обслуживании (когда заняты все три компьютера), таким образом $P_{om} = p_3 = 0.033$.

Относительная пропускная способность центра $Q = 1 - P_{om} = 1 - 0.033 = 0.967$, то есть в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot Q = 0.25 \cdot 0.967 = 0.242$, то есть в один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

Среднее число занятых компьютеров есть математическое ожидание числа занятых каналов $\bar{k} = \sum_{k=0}^{4} k p_k = 0.725$, то есть каждый компьютер будет занят обслуживанием заявок в среднем лишь на $72.5/3 = 24.2$%.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих компьютеров и выбрать компромиссное решение.