ТЕМА 2. Векторная алгебра.

1. Линейные действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число).
2. Нелинейные действия с векторами (скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение).
3. Решение задач с помощью векторной алгебры. Условие коллинеарности, условие перпендикулярности, условие компланарности векторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский.-М. : Наука, 1980.-175 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. - М. - Наука, 1975. - 239 с.
3. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. - М.: Гос. изд-во физ. - мат. лит-ры, 1961. - 229 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов. - М. : Высшая математика, 1974. - 415 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = \{2;-1;5\}, \vec{b} = \{7;1;-3\}$.

Решение:

1. Вычислим проекции векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ на оси координат:

$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} = \{5\cdot 2 + 3\cdot 7; 5\cdot(-1) + 3\cdot 1; 5\cdot 5 + 3\cdot(-3)\} = \{31;-2;16\}$,

$\vec{c}_2 = 4\vec{a} + \vec{b} = \{4\cdot 2 + 7; 4\cdot(-1) + 1; 4\cdot 5 + (-3)\} = \{15;-3;17\}$

2. Два вектора коллинеарны, если их проекции на оси координат пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность проекций векторов на оси координат:

$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2} = \frac{31}{15} \neq \frac{-2}{-3} \neq \frac{16}{17}, \Rightarrow \vec{c}_1, \vec{c}_2$ не коллинеарны.

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = \{-7;1;2\}, \vec{b} = \{3;2;-1\}$?

Решение: Два вектора перпендикулярны , если их скалярное произведение равно 0,скалярное произведение векторов, заданных проекциями на оси координат, вычисляется по формуле: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$, где $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} \Rightarrow$ вычислим скалярное произведение:

$(\vec{a}, \vec{b}) = -7\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = -21 \neq 0 \Rightarrow$ векторы не перпендикулярны.

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a}=\{-1;2;-1\},\vec{b}=\{0;2;1\},\vec{c}=\{2;0;3\}$?

Решение: Три вектора компланарны, если смешанное произведение векторов равно 0, смешанное произведение векторов вычисляется по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, где $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}\Rightarrow$ вычислим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-6+4+0-(-4)-0-0=2\neq 0\Rightarrow$$ векторы не компланарны.

Задание 4: При каком значении α векторы $\vec{AB},\vec{AC}$, где $A(2;1;\alpha),B(3;1;4),C(2;5;3).$, перпендикулярны?

Решение:

1) Для определения α, при котором векторы перпендикулярны, необходимо использовать условие перпендикулярности двух векторов (это условие было рассмотрено в задании 2) $\Rightarrow\alpha$ мы сможем найти из условия: $\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=0$, для этого найдем проекции векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ на оси координат, заданных координатами точек начала и конца вектора. В этом случае проекции вектора на оси координат равны разности координат точек, задающих конец и начало вектора $\Rightarrow$ $\vec{AB}=\{3-2;1-1;4-\alpha\}=\{1;0;4-\alpha\},\vec{AC}=\{2-2;5-1;3-\alpha\}=\{0;4;3-\alpha\}\Rightarrow$
$\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)=1\cdot0+0\cdot4+(4-\alpha)\cdot(3-\alpha)=0+0+(4-\alpha)\cdot(3-\alpha)=(4-\alpha)\cdot(3-\alpha)=0\Rightarrow\alpha=4,\alpha=3.$

Итак: векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны при $\alpha=4$ и при $\alpha=3$.

Задание 5: Даны точки: $A(1;0;-1),B(0;1;3),C(2;0;1)$.

Найти:

1. $\text{пр}_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)$;
2. $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|$;
3. $\angle\left(\vec{AB}-\vec{CB},\vec{AB}\right)$;
4. орт вектора $\vec{AB}$;
5. $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)$;
6. $\left[\left(\vec{AB}+2\vec{BC}\right),\left(\vec{CB}-\vec{AB}\right)\right]$;
7. $\vec{AB}\cdot\vec{BC}\cdot\vec{AC}$;

Решение:

1. Из определения скалярного произведения следует, что проекцию вектора на вектор можно вычислить по формуле: $\text{пр}_{\vec{BC}}\vec{AB}=\dfrac{\left(\vec{AB},\vec{BC}\right)}{\left|\vec{BC}\right|}$, где скалярное произведение векторов вычисляется по формуле: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$, где

$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, и длина вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}} \Rightarrow$ итак ,в нашем случае, формула принимает вид: $np_{\vec{AB}+\vec{CB}}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\dfrac{\left(\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right),\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right)}{\left|\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right|} \Rightarrow$ для нахождения $np_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)$ необходимо найти проекции векторов на оси координат, заданных координатами точек начала и конца векторов, скалярное произведение и длину соответствующего вектора:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\}$,

$\vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\}$,

$\vec{AB}+\vec{CB}=\{(-1)+(-2);1+1;4+2\}=\{-3;2;6\}$,

$2\vec{AC}=\{2\cdot 1;2\cdot 0;2\cdot 2\}=\{2;0;4\},3\vec{CB}=\{3\cdot(-2);3\cdot 1;3\cdot 2\}=\{-6;3;6\}$,

$2\vec{AC}+3\vec{CB}=\{2+(-6);0+3;4+6\}=\{-4;3;10\}$,

$\left(\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right),\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)\right)=(-3)\cdot(-4)+2\cdot 3+6\cdot 10=12+6+60=78$,

$\left|\vec{AB}+\vec{CB}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7 \Rightarrow$

на основании формулы, выше написанной, получим :

$$np_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{\left(\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right),\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right)}{\left|\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)\right|}=\frac{78}{7}$$

$$\Rightarrow \text{пр}_{\left(\vec{AB}+\vec{CB}\right)}\left(2\vec{AC}+3\vec{CB}\right)=\frac{78}{7};$$

2. Для нахождения длины вектора воспользуемся формулой: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}},\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, для этого найдем проекции векторов на оси координат (смотри пункт 1), так же найдем сумму векторов по правилу сложения векторов, заданных проекциями на оси координат:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\}$,

$4\vec{BC}=\{4\cdot 2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\}$,

$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\}$

$\Rightarrow \left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{7^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{49+9+16}=\sqrt{74}$;

Итак: $\left|\vec{AB}+4\vec{BC}\right|=\sqrt{74}$.

3. Угол между векторами можно найти из определения скалярного произведения: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=arc\cos\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow$ в нашем случае формула принимает вид: $\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\dfrac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|} \Rightarrow$ находим проекции векторов на оси координат (смотри пункты 1 и 2), вычисляем

скалярное произведение векторов, заданных своими проекциями на оси координат, вычисляем длины векторов:

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{CB}=\{0-2;1-0;3-1\}=\{-2;1;2\},$

$\vec{AB}-\vec{CB}=\{(-1)-(-2);1-1;4-2\}=\{1;0;2\},$

$\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=1\cdot(-1)+0\cdot 1+2\cdot 4=7,$

$\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5},$

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}$

$\Rightarrow$

$$\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)}{\left|\vec{AB}-\vec{CB}\right|\cdot\left|\vec{AB}\right|}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}}=\arccos\frac{7}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}}=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}};$$

Итак $\angle\left(\left(\vec{AB}-\vec{CB}\right),\vec{AB}\right)=\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}.$

4. Направление вектора $\vec{a}$ определяется углами α,β,γ, образованными им с осями координат $Ox,Oy,Oz.$ Косинусы этих углов (направляющие косинусы вектора) определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$ мы имеем вектор единичной длины, такой вектор называется ортом $\Rightarrow$ для нахождения орта вектора необходимо каждую проекцию вектора на оси координат разделить на его длину

$$\Rightarrow\begin{array}{l}\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\},\\ \left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\end{array}\Rightarrow\text{орт вектора } \vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}.$$

Итак: орт вектора $\vec{AB}=\left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}}\right\}.$

5. Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z, \vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}, \vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ (см. пункты 1 и 2), вычислим проекции векторов на оси координат и скалярное произведение векторов :

$\vec{AB}=\{0-1;1-0;3-(-1)\}=\{-1;1;4\}, \vec{BC}=\{2-0;0-1;1-3\}=\{2;-1;-2\},$

$4\vec{BC}=\{4\cdot 2;4\cdot(-1);4\cdot(-2)\}=\{8;-4;-8\},$

$\vec{AB}+4\vec{BC}=\{-1+8;1+(-4);4+(-8)\}=\{7;-3;-4\},$

$\vec{BA}=-\vec{AB}=\{(-1)\cdot(-1);(-1)\cdot 1;(-1)\cdot 4\}=\{1;-1;-4\}, \vec{AC}=\{2-1;0-0;1-(-1)\}=\{1;0;2\},$

$\vec{BA}-\vec{AC}=\{1-1;-1-0;-4-2\}=\{0;-1;-6\}\Rightarrow$

$\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=7\cdot 0+(-3)\cdot(-1)+(-4)\cdot(-6)=0+3+24=27;$

Итак: $\left(\left(\vec{AB}+4\vec{BC}\right),\left(\vec{BA}-\vec{AC}\right)\right)=27;$

6. Векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_y & b_y & b_z\end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}\Rightarrow$$

Находим проекции векторов на оси координат:

$A\vec{B}=\left\{0-1;1-0;3-(-1)\right\}=\left\{-1;1;4\right\}, B\vec{C}=\left\{2-0;0-1;1-3\right\}=\left\{2;-1-2\right\},$

$2B\vec{C}=\left\{2\cdot 2;2\cdot(-1);2\cdot(-2)\right\}=\left\{4;-2;-4\right\},$

$A\vec{B}+2B\vec{C}=\left\{-1+4;1+(-2);4+(-4)\right\}=\left\{3;-1;0\right\}, C\vec{B}=\left\{0-2;1-0;3-1;\right\}=\left\{-2;1;2\right\},$

$C\vec{B}-A\vec{B}=\left\{-2-(-1);1-1;2-4\right\}=\left\{-1;0;-2\right\}\Rightarrow$

$$\left[\left(A\vec{B}+2B\vec{C}\right),\left(C\vec{B}-A\vec{B}\right)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)\cdot(-2)+\vec{j}\cdot 0\cdot(-1)+\vec{k}\cdot 3\cdot 0-\vec{k}\cdot(-1)\cdot(-1)-$$

$\vec{i}\cdot 0\cdot 0-\vec{j}\cdot(-2)\cdot 3=$

$2\vec{i}+0\vec{j}-0\vec{k}-\vec{k}-0\vec{i}+6\vec{j}=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$

Итак: $\left[\left(A\vec{B}+2B\vec{C}\right),\left(C\vec{B}-A\vec{B}\right)\right]=2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k}.$

7. Смешанное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\}\Rightarrow$$

$A\vec{B}=\left\{0-1;1-0;3-(-1)\right\}=\left\{-1;1;4\right\}, B\vec{C}=\left\{2-0;0-1;1-3\right\}=\left\{2;-1;-2\right\},$

$A\vec{C}=\left\{2-1;0-0;1-(-1)\right\}=\left\{1;0;2\right\},$

$$A\vec{B}\cdot B\vec{C}\cdot A\vec{C}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-2)+2\cdot 0\cdot 4-1\cdot(-1)\cdot 4-0\cdot(-2)\cdot(-1)-2\cdot 1\cdot 2=$$

$=2+(-2)+0-(-4)-0-4=2-2+4-4=0;$

Итак: $A\vec{B}\cdot B\vec{C}\cdot A\vec{C}=0.$

Задание 6: Даны координаты вершин пирамиды:

$$A(1;4;3), B(2;3;1), C(-2;1;3), D(0;1;2).$$

Вычислить:

1. объем пирамиды;
2. длину ребра AB;
3. площадь грани ABC;

Решение:

1. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, а объем параллелепипеда вычисляется на основании геометрического смысла смешанного произведения $\Rightarrow$ объем

параллелипипеда, построенного на векторах как на ребрах равен:

$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\},\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\},\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\},$

Найдем проекции соответствующих векторов на оси координат:

$A\vec{B}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}, A\vec{C}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\},$

$A\vec{D}=\{0-1;1-4;2-3\}=\{-1;-3;-1\},$

Тогда объем пирамиды равен:

$V=\frac{1}{6}\left|A\vec{B}\cdot A\vec{C}\cdot A\vec{D}\right|$

Вычислим объем по указанной формуле:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|3+0-18+6-0+3\right|=\frac{1}{6}\left|-6\right|=1;$$

2. Длина ребра

$AB=\left|A\vec{B}\right|\Rightarrow A\vec{B}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}\Rightarrow$

$\left|A\vec{B}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$; (смотри пункт 5,3)

3. Площадь грани ABC вычисляется по формуле:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[A\vec{B},A\vec{C}\right]\right\|$ так как грань $ABC-$ треугольник, а площадь треугольника можно вычислить как половину площади параллелограмма, а площадь параллелограмма равна длине векторного произведения векторов, на которых построен параллелограмм на основании свойств векторного произведения $\Rightarrow$ найдем проекции векторов на оси координат:

$A\vec{B}=\{2-1;3-4;1-3\}=\{1;-1;-2\}, A\vec{C}=\{-2-1;1-4;3-3\}=\{-3;-3;0\}$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-6\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}\right| \quad =\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=\frac{6}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$