ТЕМА 3. Аналитическая геометрия

1. Уравнения линии в декартовой системе координат.
2. Параметрические уравнения линии.
3. Плоскость, прямая на плоскости и в пространстве.
4. Линии второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов.-5-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2002. – 317 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: - М.: Физматлит, 2003. – 303 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов / ред. Ефимов Н. В. – 17-е изд., стер. – СПб: Профессия, 2001. – 199 с.
4. Привалов И. И. Аналитическая геометрия: Учеб. – 33-е изд., стер. – СПб; М.: Лань, 2004. – 299 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полн. курс.-2-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2004.-603 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа.- (Высшее образование. Современный учебник). т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-2003.-284 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.
8. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие в 3 т.-СПб: Политехника. т.1. -2003.-704 с.

Решение типового варианта контрольной работы

Задача №1.

Даны три последовательные вершины параллелограмма A(2;-3), B(5;1),C(3;-4). Не находя координаты вершины D, найти:

1) уравнение стороны AD;
2) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
3) длину высоты BK;
4) уравнение диагонали BD;
5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Решение.

Сначала построим чертеж. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Построим отрезки AB и BC.

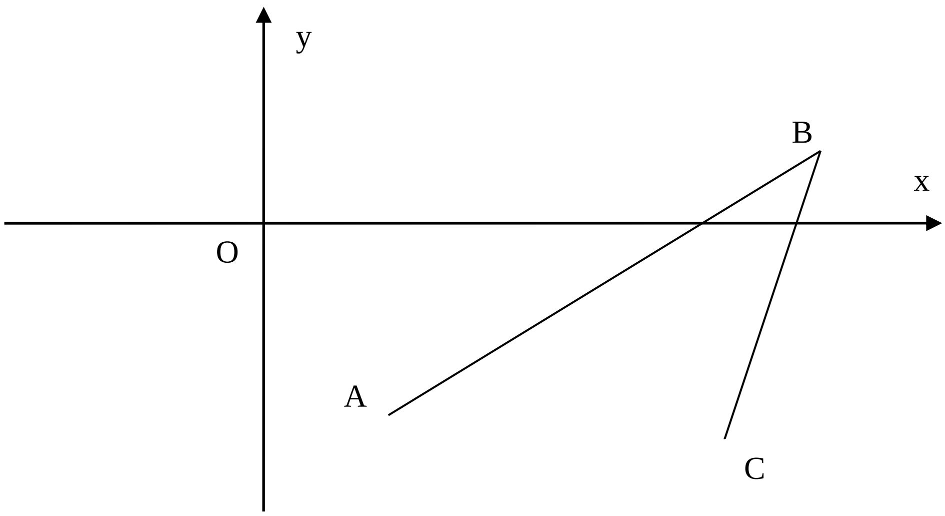

Рис. 1

Достроим полученный рисунок до параллелограмма и нанесем на чертеж высоту ВК.

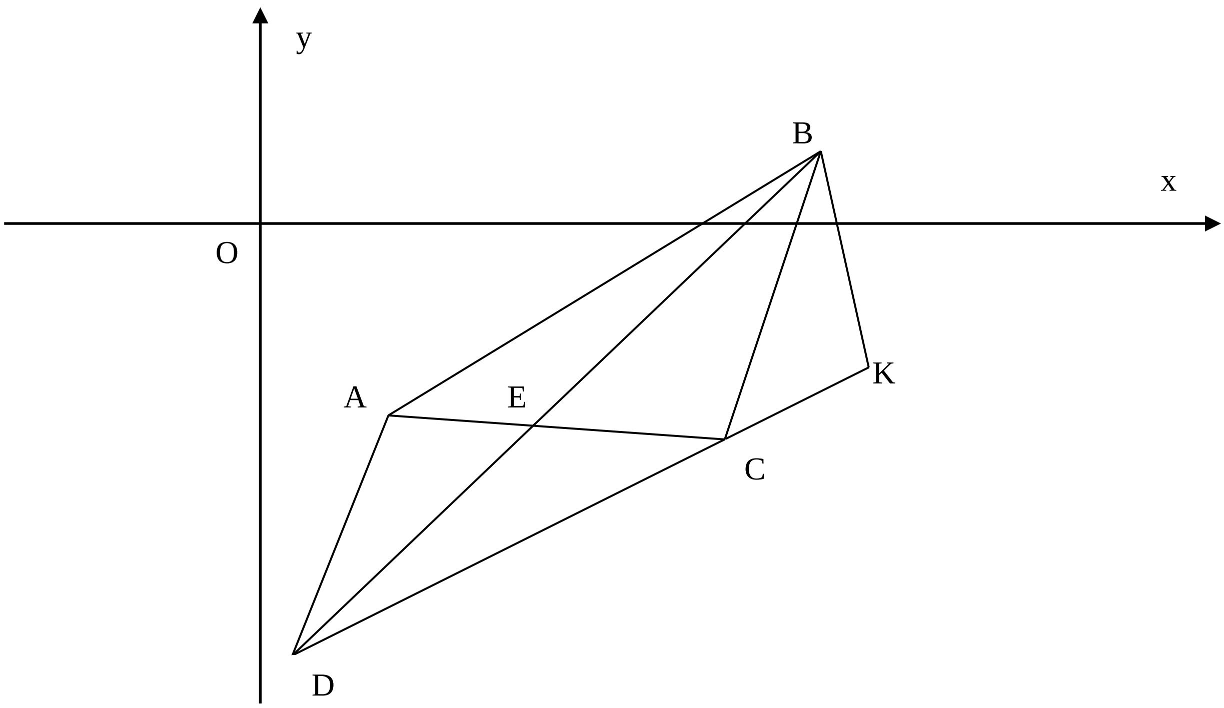

Рис. 2

1) Составим уравнение прямой AD.

а) Предварительно найдем уравнение прямой ВС. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.1)$$

По условию $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Подставим координаты точек B и C в уравнение (3.1): $\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{-4-1}$, т.е. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-5}$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, то есть в виде $Ax+By+C=0$. Для этого в последнем уравнении избавимся от знаменателей $-5(x-5)=-2(y-1)$ и проведем преобразования, перенося все слагаемые в левую часть равенства: $-5x+2y+23=0$ или $5x-2y-23=0$.

Из этого уравнения выразим y: $-2y=-5x+23$; $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Получили уравнение вида $y=kx+b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

б) Воспользуемся тем фактом, что противоположные стороны параллелограмма параллельны. Составим искомое уравнение прямой AD как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ в данном направлении, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (3.2)$$

где направление определяется угловым коэффициентом k.

Условие параллельности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=k_1 \qquad (3.3)$$

По условию задачи $A(2;-3)$, прямая BC: $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Подставим координаты точки A в уравнение (3.2): $y+3=k(x-2)$. Так как прямая AD параллельна прямой BC, то в силу формулы (3.3) их угловые коэффициенты совпадают. Угловой коэффициент прямой BC равен $\frac{5}{2}$, следовательно, уравнение прямой AD имеет вид $y+3=\frac{5}{2}(x-2)$.

Запишем уравнение прямой AD в общем виде. Для этого раскроем скобки и все слагаемые перенесем в левую часть равенства: $-\frac{5}{2}x+y+8=0$. Умножим обе часть равенства на (-2) и получим общее уравнение прямой AD: $5x-2y-16=0$.

Запишем уравнение прямой AD в виде с угловым коэффициентом. Для этого выразим y из общего уравнения: $y=\frac{5}{2}x-8$.

2) Составим уравнение высоты BK, проведенной из вершины B на сторону AD как уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AD.

Условие перпендикулярности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=-\frac{1}{k_1} \qquad (3.4)$$

Подставим координаты точки B в уравнение (3.2): $y-1=k(x-5)$. Так как высота BK перпендикулярна прямой AD, то их угловые коэффициенты связаны соотношением (3.4). Угловой коэффициент прямой AD равен $\frac{5}{2}$, следовательно, угловой коэффициент высоты BK равен $-\frac{2}{5}$ и уравнение прямой BK имеет вид $y-1=-\frac{2}{5}(x-5)$. Запишем уравнение высоты BK в общем виде: $2x+5y-15=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=-\frac{2}{5}x+3$.

3) Найдем длину высоты BK как расстояние от точки B до прямой AD.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (3.5)$$

Так как BK перпендикулярна AD, то длина BK может быть найдена с помощью формулы (3.5). По условию $B(5;1)$, прямая AD определяется уравнением $5x-2y-16=0$. В силу формулы (3.5) длина высоты BK равна $d=\frac{|5\cdot 5-2\cdot 1-16|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{25+4}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$.

4) Найдем уравнение диагонали BD как уравнение прямой, проходящей через точки B и E, где E - середина отрезка AC.

а) Если $A(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$, то координаты точки $E(x_0;y_0)$ - середины отрезка AC, определяются формулами

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (3.6)$$

По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. В силу формул (3.6) имеем: $x_0=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$, $y_0=\frac{-3-4}{2}=-\frac{7}{2}$. Следовательно $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$.

б) Так как точка пересечения диагоналей является их серединой, то точка E (середина отрезка AC) является точкой пересечения диагоналей и диагональ BD проходит через точку E.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $B(5;1)$, $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$. В силу формулы (3.1) уравнение прямой BE (диагонали BD) имеет вид: $\frac{x-5}{\frac{5}{2}-5}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}-1}$ или $\frac{x-5}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{9}{2}}$. Запишем это уравнение в общем виде:

$9x-5y-40=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=\frac{9}{5}x-8$.

5) Найдем тангенс угла между диагоналями BD и AC.

а) Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. Следовательно, $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{-4+3}$. Общее уравнение диагонали AC имеет вид $x+y+1=0$, уравнение с угловым коэффициентом – вид $y=-x-1$, угловой коэффициент k_1 прямой AC равен -1.

б) Уравнение диагонали BD имеет вид $y=\frac{9}{5}x-8$, ее угловой коэффициент $k_2=\frac{9}{5}$.

в) Тангенс угла φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется формулой

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$$

Следовательно, $tg\varphi=\left|\frac{\frac{9}{5}-(-1)}{1+\frac{9}{5}\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{\frac{14}{5}}{-\frac{4}{5}}\right|=\frac{7}{2}$. Отсюда $\varphi=arctg\frac{7}{2}$.

Задача №2.

Условие задачи №2 несколько различается в зависимости от номера варианта контрольной работы. Приведем решения простейших задач, входящих в это задание.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;3;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(4;2;-3)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.7)$$

Тогда уравнение плоскости ABC в силу уравнения (3.7) имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2-1 & 1-3 & 0-2 \\ 4-1 & 2-3 & -3-2 \end{vmatrix}=0$ или $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, т.е. в виде $Ax+By+Cz+D=0$. Для этого раскроем определитель по первой строке

$(x-1)\cdot(10-2)-(y-3)\cdot(15+6)+(z-2)\cdot(3+6)=0$. После преобразований получим: $8x-21y+9z+37=0$.

2) Найти нормальный вектор плоскости $2x+3y-z+5=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\overline{N}$ - это вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то нормальный вектор имеет координаты $\{A,B,C\}$.

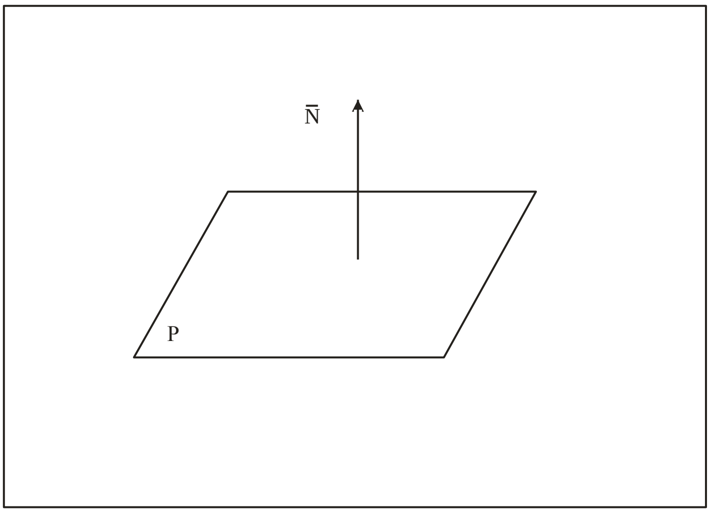

Рис. 3

Для плоскости $2x+3y-z+5=0$ нормальным является вектор $\overline{N}=\{2;3;-1\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{N}=\{2;3;-1\}$ так же является нормальным вектором плоскости $2x+3y-z+5=0$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-\lambda\}$ будет являться нормальным вектором рассматриваемой плоскости.

3) Найти косинус угла между плоскостями $2x-3y+z-4=0$ и $x+5y+4z=0$.

Решение.

Угол φ между двумя плоскостями $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ представляет собой угол между их нормальными векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Для плоскости $2x-3y+z-4=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ определяются равенствами $A_1=2$, $B_1=-3$, $C_1=1$. Для плоскости $x+5y+4z=0$ - равенствами $A_2=1$, $B_2=5$, $C_2=4$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+(-3)\cdot5+1\cdot4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+4^2}}=$$

$$\frac{2-15+4}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+25+16}}=\frac{-9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{42}}=-\frac{9}{\sqrt{588}}=-\frac{9}{14\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

4) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1;-2;5)$ параллельно плоскости P_1: $2x+3y-z+5=0$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{3.8}$$

Подставим в уравнение (3.8) координаты точки M_0: $A(x-1)+B(y+2)+C(z-5)=0$.

Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{3.9}$$

Так как плоскости P и P_1 параллельны, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости P можно взять нормальный вектор $\overline{N_1}=\{2;3;-1\}$ плоскости P_1, т.е. в формуле (3.9) отношение $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P_1 примет вид $2(x-1)+3(y+2)-(z-5)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $2x+3y-z+9=0$.

5) Найти расстояние от точки $M_0(1,3,-2)$ до плоскости P: $3x-2y+4z-5=0$.

Решение.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{3.10}$$

Для плоскости $3x-2y+4z-5=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=3$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно,

$$d=\frac{|3\cdot1-2\cdot3+4\cdot(-2)-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{16}{\sqrt{29}}.$$

6) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$ и $M_2(3;1;2)$.

Решение.

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3.11}$$

Так как $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$, то в силу (3.11) получим уравнения $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-3}{2-3}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

7) Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$.

Решение.

Направляющий вектор $\bar{s}$ - это вектор, параллельный прямой.

Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор $\bar{s}$ имеет координаты $\{p;q;r\}$.

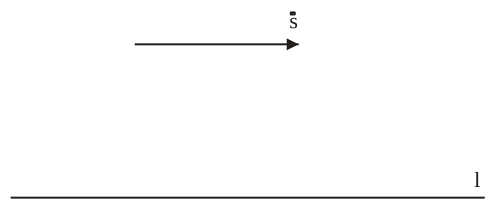

Рис. 4

Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\bar{s}=\{2;3;-2\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\bar{s}=\{2;3;-2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

8) Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$.

Решение.

Угол φ между двумя прямыми $l_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $l_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}_1=\{p_1;q_1;r_1\}$ определяются равенствами $p_1=2$, $q_1=-2$, $r_1=3$. Для прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2=3$, $q_2=-4$, $r_2=1$. Значит, $\cos\varphi=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{6+8+3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$.

9) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ параллельно прямой l_1: $\frac{x-5}{4}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{3}$.

Решение.

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.

В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-3}{p}=\frac{y-2}{q}=\frac{z+1}{r}$.

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad (3.12)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять направляющий вектор $\bar{s}_1=\{4;-2;3\}$ прямой l_1, т.е. в формуле (3.12) отношение $\frac{p}{4}=\frac{q}{-2}=\frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

10) Найти угол между прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскостью P: $2x-y+3z-4=0$.

Решение.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, где ψ - угол между направляющим вектором $\bar{s}$ прямой и нормальным вектором $\overline{N}$ плоскости.

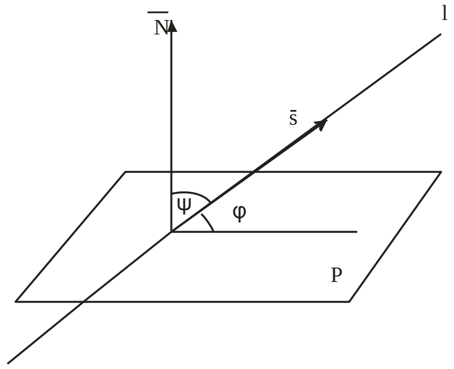

Рис. 5

Угол φ между прямой $l:\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Для плоскости P: $2x - y + 3z - 4 = 0$ координаты нормального вектора $\overline{N} = \{A; B; C\}$ определяются равенствами $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$. Для прямой l: $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\bar{s} = \{p; q; r\}$ - равенствами $p = 5$, $q = 3$, $r = -1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен $\sin\varphi = \frac{2\cdot 5 + (-1)\cdot 3 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}} = \frac{4}{\sqrt{490}}$.

Следовательно, $\varphi = \arcsin\frac{4}{\sqrt{490}}$.

11) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно прямой l: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-0}{-2}$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0. Получим: $A(x-1) + B(y+2) + C(z+3) = 0$.

Условие перпендикулярности плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r} \qquad (3.13)$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s} = \{4,1,-2\}$ прямой l, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{A}{4} = \frac{B}{1} = \frac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4\cdot(x-1) + 1\cdot(y+2) + (-2)\cdot(z+3) = 0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x + y - 2z - 8 = 0$.

12) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$ перпендикулярно плоскости P: $x + 4y - z = 0$.

Решение.

Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$.

Подставим в эти уравнения координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-5}{p} = \frac{y+3}{q} = \frac{z-2}{r}$

Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$.

Так как прямая l перпендикулярна плоскости P, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор $\bar{N}=\{1;4;-1\}$ плоскости P, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{1}{p}=\frac{4}{q}=\frac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-1}$.

13) Найти координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости P: $x+2y-z+5=0$.

Решение.

Координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases} \tag{3.14}$$

Запишем параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$ и подставим выражения для x,y,z в уравнение плоскости P: $(1+2t)+2\cdot 3t-(-1+t)+5=0$. Отсюда $7t+7=0$; $t=-1$. Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$.

Следовательно, $M_0(-1;-3;-2)$.

Задача №3.

К кривым второго порядка относятся эллипс (рис.6), гипербола (рис. 7 и 8), парабола (рис. 9-12). Приведем рисунки и канонические уравнения этих кривых.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

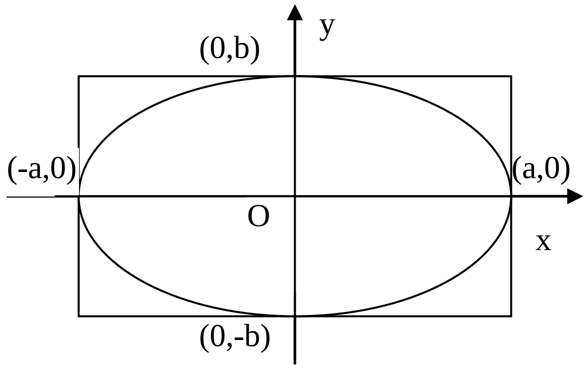

Рис. 6

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

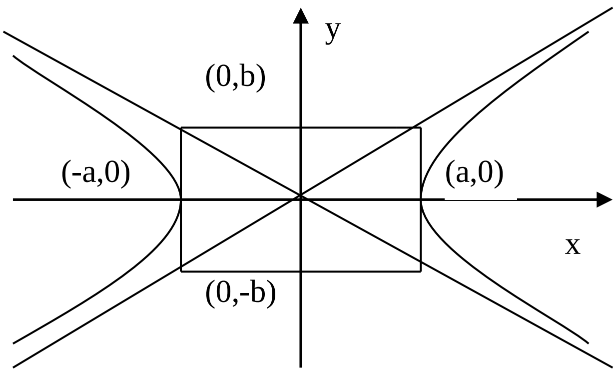

Рис. 7

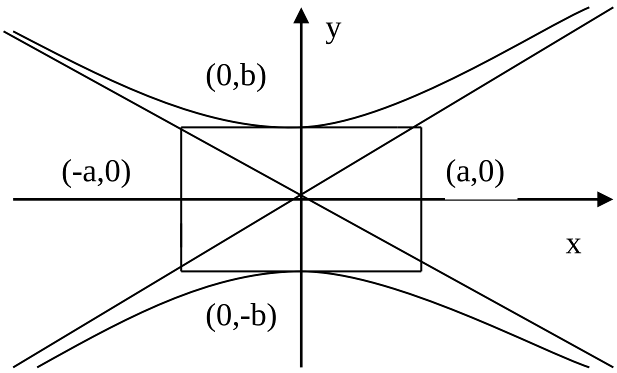

Рис. 8

Парабола $y^2 = 2px$

Парабола $y^2 = 2px$

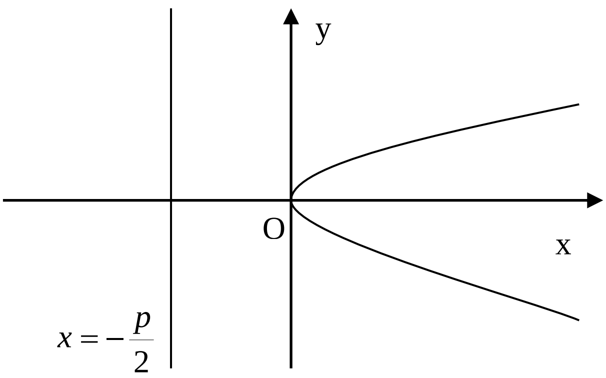

Рис. 9

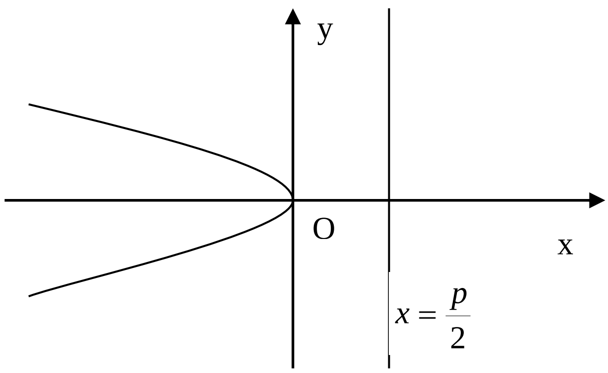

Рис. 10

Парабола $x^2 = 2py$

Парабола $x^2 = -2py$

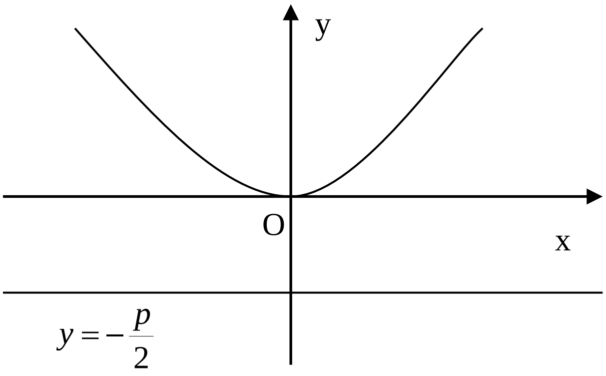

Рис. 11

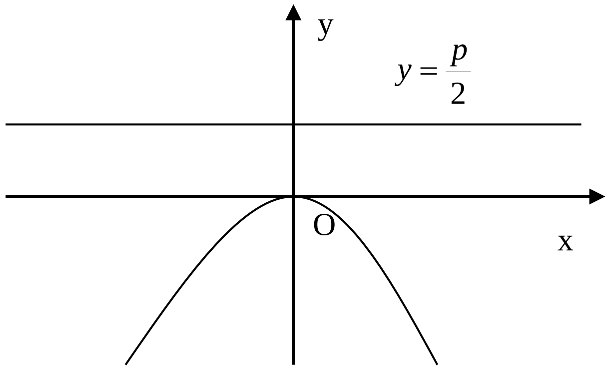

Рис. 12

Приведем примеры решения задачи №3.

Пример 1. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2+y^2+16x-2y-8=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение.

Для приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду применяют метод выделения полного квадрата.

Сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты. Коэффициенты при x^2 и y^2 вынесем за скобки: $4(x^2+4x)+(y^2-2y)-8=0$.

Выделим полный квадрат: $4(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)-8-16-1=0$. Отсюда $4(x+2)^2+(y-1)^2=25$. Разделим обе части равенства на 25: $\frac{4(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$.

Запишем полученное уравнение в каноническом виде: $\frac{(x+2)^2}{25/4}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$.

Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}$. При таком преобразовании начало координат переносится в точку (x_0,y_0), уравнение эллипса принимает канонический вид $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$.

В нашем примере $x_0=-2$, $y_0=1$, $a=\frac{5}{2}$, $b=5$.

Итак, рассматриваемое уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-2;1)$ и полуосями $\frac{5}{2}$ и 5.

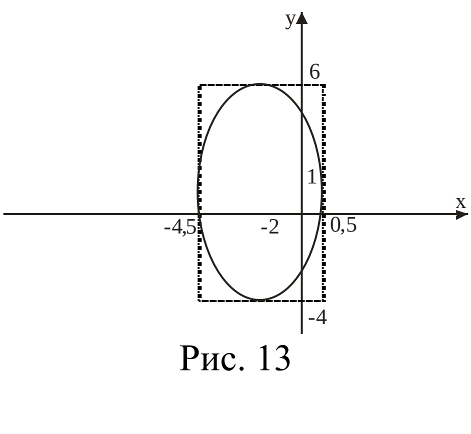

Рис. 13

Пример 2. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2+16x-2y+1=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение.

Как и в предыдущем примере, сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты: $4(x^2+4x)-2y+1=0$.

В скобках выделим полный квадрат: $4(x^2+4x+4)-16-2y+1=0$; $4(x+2)^2=2y+15$. Отсюда $(x+2)^2=\frac{1}{2}(y+\frac{15}{2})$.

Выполним замену переменных $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y+\frac{15}{2} \end{cases}$. После этого преобразования уравнение параболы принимает канонический вид $X^2=\frac{1}{2}Y$, вершина параболы в системе координат Oxy расположена в точке $C(-2;-\frac{15}{2})$.

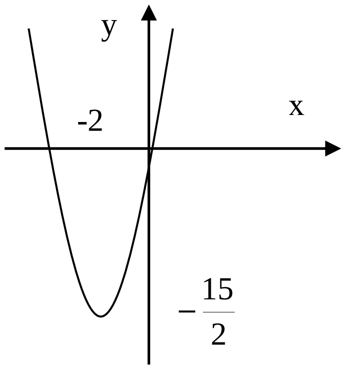

Рис. 14

Задача №4.

Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho=1+\cos\varphi$.

Требуется:

1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$;
2) построить полученные точки;
3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение.

Сначала построим таблицу значений φ и ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$
ρ	2,00	1,92	1,71	1,38	1,00	0,62	0,29	0,08	0,00	0,08	0,29	0,62	1,00	1,38	1,71	1,92

Построим эти точки в полярной системе координат. Полярная система координат состоит из начала координат O (полюса) и полярной оси OP. Координаты точки M в полярной системе координат определяются расстоянием ρ от полюса (полярным радиусом) и углом φ между направлением полярной оси и полярным радиусом (полярным углом). Для того, чтобы построить точку M, необходимо построить луч, выходящий из точки O под углом φ к полярной оси; отложить на этом луче отрезок длиной ρ.

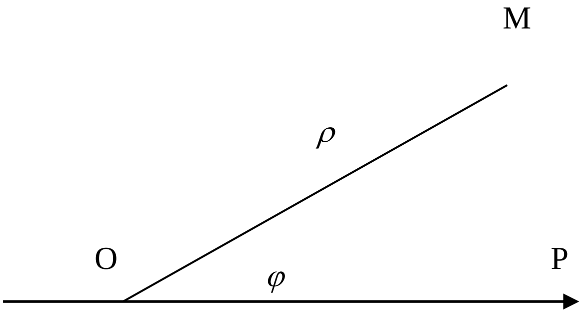

Рис. 15

Построим все точки, определенные в таблице и соединим их плавной линией

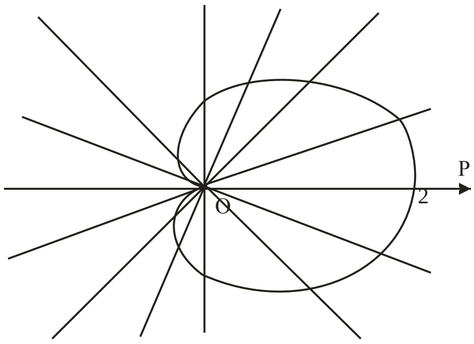

Рис. 16

Запишем уравнение рассматриваемой кривой в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулами перехода от декартовой к полярной системе координат.

Если полюс совпадает с началом координат прямоугольной декартовой системы координат, полярная ось – с осью абсцисс, то между прямоугольными декартовыми координатами $(x;y)$ и полярными координатами $(\rho;\varphi)$ существует следующая связь:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Откуда

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

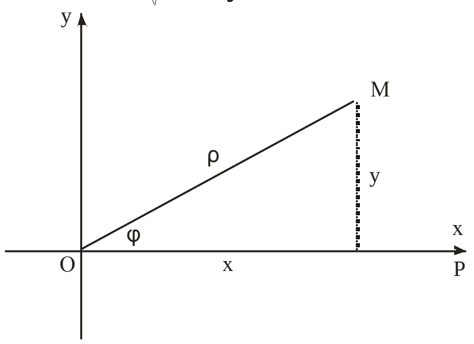

Рис. 17

Итак, в уравнении исходной кривой $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Поэтому уравнение $\rho = 1+\cos\varphi$ принимает вид $\sqrt{x^2+y^2} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. После преобразований получим уравнение $x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$.

Задача №5.

Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

1) $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases}$

2) $-\sqrt{36-(x+3)^2} \le y-3 \le 0$

Решение.

Для того, чтобы решить неравенство $F(x,y) \ge 0$ на плоскости, надо построить график линии $F(x,y)=0$. Кривая $F(x;y)=0$ разбивает плоскость на части, в каждой из которых выражение $F(x;y)$ сохраняет свой знак. Выбирая пробную точку в каждой из этих частей, найдем часть плоскости, являющуюся искомым решением неравенства.

1) Построим прямые $x=1$ и $x=2$, заштрихуем область, в которой $1 \le x \le 2$. Затем построим параболу $y^2 = 2x$ и заштрихуем область, содержащую ось симметрии параболы (расположенную внутри параболы); построим прямую $y=0$ и заштрихуем область, лежащую выше прямой. Пересечение всех заштрихованных областей и определит множество точек, представляющих решение рассматриваемой системы.

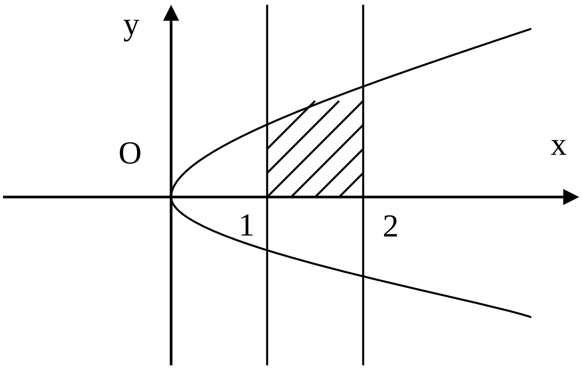

Рис. 18

2) Построим линию, определяемую уравнением $y-3=-\sqrt{36-(x+3)^2}$. Эта линия представляет собой ту часть окружности $(y-3)^2=36-(x+3)^2$ или $(x+3)^2+(y-3)^2=36$, на которой $y-3\leq 0$. Далее построим прямую $y-3=0$ ($y=3$). Решением рассматриваемого двойного неравенства является часть плоскости, расположенная между нижней половиной окружности $(x+3)^2+(y-3)^2=36$ с центром в точке $(-3{,}3)$ радиуса 6 прямой $y=3$.

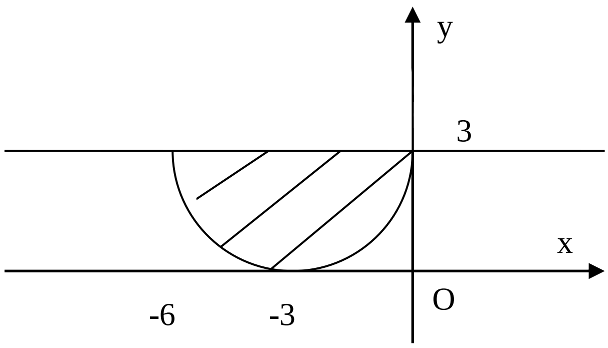

Рис. 19