ТЕМА 4. Введение в математический анализ.

1. Число, переменная, функция.
2. Предел функции.
3. Основные виды неопределенностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс.Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

1. Вычислить пределы функций.

а) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

Решение. Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и $7x^5+2x+3$ являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x^2+1\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7x^5+2x+3\right)=\infty$.

Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности и использовании теоремы о пределе отношения двух функций выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

Ответ. 0.

б) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Ответ. -9.

Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для вычисления данного предела подставим значение $x=-1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{(-1)^2+14\cdot(-1)-32}{(-1)^2-6\cdot(-1)+8}=\frac{-45}{15}=-3.$$

Ответ. -3.

в) **Найти** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$**.**

г) **Найти** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$**.**

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim\limits_{A\to 0}\frac{\sin A}{A}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

Ответ. k

д) **Найти** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0\cdot\infty\}$ в этом случае, нужно произведение преобразовать в частное, то есть неопределенность $\{0\cdot\infty\}$ свести к неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\sin\frac{\pi x}{2}=1, при\; x=1\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y\to 0, x=y+1\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin\frac{\pi}{2}y}.$$

Выделяем первый замечательный предел, то есть, умножаем числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. Получаем,

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

е) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{1^{\infty}\right\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2}{x+1}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2}.

ж) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{1^{\infty}\right\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\begin{bmatrix} y=x-2, \\ x=y+2, y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}(3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+3y)^{\frac{1\cdot 3}{y\cdot 3}}=e^{3}.$$

Ответ. e^{3}.

Найти $\lim\limits_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x=\frac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(3\cdot\frac{5}{2}-5\right)^{\frac{1}{5/2-2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}=\frac{25}{4}.$$

Ответ. $\frac{25}{4}$.

2. Задана функция $y=2^{\frac{1}{x-3}}$ и два значения аргумента $x_1=3, x_2=1$.

Требуется:

– **найти пределы функции при приближении к каждому из данных значений x слева и справа;**

– **установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x;**

– **сделать схематический чертеж.**

Решение. Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 3$.

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0-0} 2^{\frac{1}{t}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0+0} 2^{\frac{1}{t}} == \infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый предел бесконечен. Следовательно, по определению $x_0 = 3$ точка разрыва второго рода.

Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x_0 = 1$ точка непрерывности функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$.

Сделаем схематический чертеж.

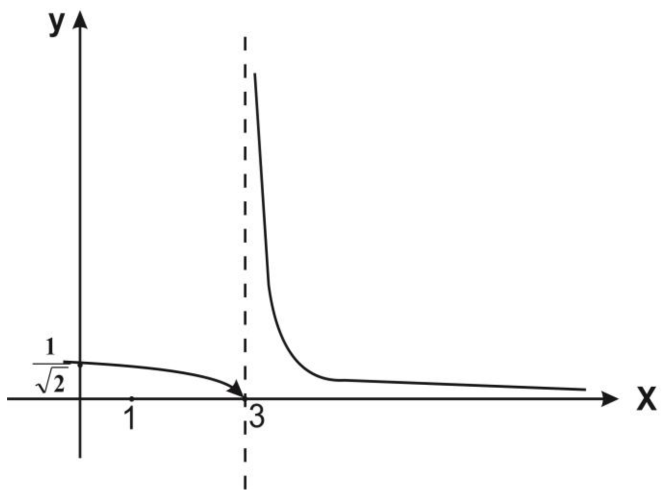

Рис. 1

3. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной.

Требуется:

1) **найти точки разрыва функции, если они существуют;**
2) **найти скачок функции в каждой точке разрыва;**
3) **сделать схематический чертеж.**

$$y = \begin{cases} x-1, \ x<0, \\ x^2-1, \ 0 \le x \le 1, \\ 2, \ x>1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1 = x-1$ непрерывна для $x<0$, функция $y_2 = x^2-1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3 = 2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1,\infty)$.

Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x=0$ и $\boldsymbol{x=1}$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} y = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1) = -1$, $y(0) = -1$. Таким образом, точка $\boldsymbol{x=0}$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 1-1 = 0$. Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x=1$ равен $d = \left|\lim\limits_{x\to 1+0} y - \lim\limits_{x\to 1-0} y\right| = |2-0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

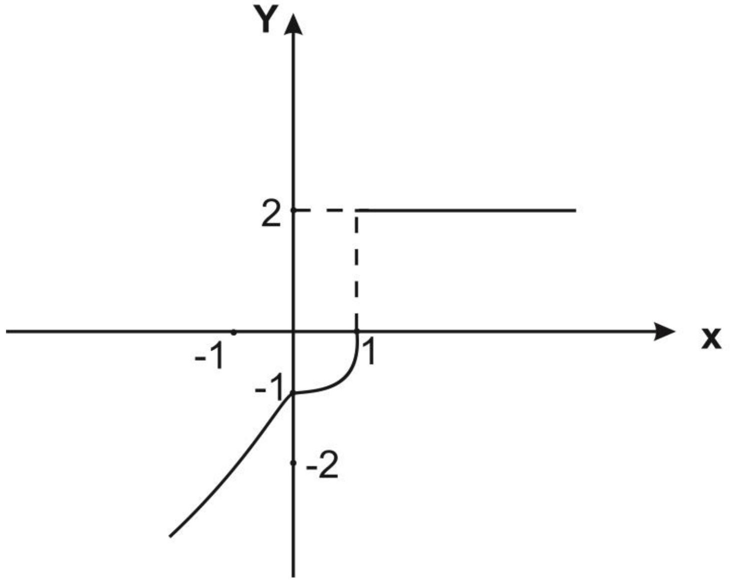

Рис. 2