ТЕМА 5. Производная и дифференциал

1. Производная.
2. Дифференциал.
3. Производные и дифференциалы высших порядков.
4. Свойства дифференцируемых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров *Я.С.,* Никольский СМ. Высшая математика: Учеб.для вузов:в Зт.- 5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. -М.: Интеграл - Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. - 8-е изд.-М.: Физматлит. т. 1 - 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. - 5-е изд., перераб. и доп. -М.: Дрофа. Т.1. - 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. - 6-е изд. стер. -М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта

Пример 1.
Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

Решение:

$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2}$;

$$y' = 4\cdot 3x^2 + 3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:

Используем формулу $(u\cdot v)' = u'v + uv'$.

$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot \left(e^x\right)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$.

в) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(x^2\right)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin\left(x^2 + 3\right)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$$y' = (\sin u)_u' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x.$$

д) $y = \left(x^2 + e^x\right)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 10\left(x^2 + e^x\right)^9 \cdot \left(2x + e^x\right).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2 \left(e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x.$$

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по x, полагая, что y есть функция от x и обозначая производную y через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0.$$

Выразим из полученного равенства y':

$\left(2y + 2x^2\right)y' = 2x - 4xy$;

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}.$$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x$;

$(-\sin y - 8y)y' = e^x$;

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y}.$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используем формулу $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2+3)'} = \frac{-\sin t}{2t}.$$

Пример 3.

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y = \ln(\cos x)$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = (-tgx)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) $y = xe^x$.

Решение:

$y' = e^x + xe^x$,

$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$.

Пример 4.

Найти дифференциал функции y , если $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$y = \ln(\sin x) - \ln x$.

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = ctgx - \frac{1}{x};$$
$$dy = \left(ctgx - \frac{1}{x}\right)dx.$$

Пример 5.

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 4x^2 + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

Найдем ординату точки касания:

$$y_0 = x_0^3 - 4x_0^2 + 8 = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 = 5.$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$$k = y'(x_0) = (x^3 - 4x^2 + 8)'\Big|_{x=1} = (3x^2 - 4 \cdot 2x)\Big|_{x=1} = -5.$$

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение касательной $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y = 5 - 5(x-1) = -5x + 10,$$

получили уравнение касательной $y = -5x + 10$.

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение нормали $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$:

$$y = 5 - \frac{1}{-5}(x-1) = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5},$$

получили уравнение нормали $y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$.