ТЕМА 6. Исследование функций.

1. Функция, основные свойства.
2. Наибольшее и наименьшее значение функции, заданной на ограниченном промежутке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы

Пример 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$

$y' = 0$ при $x = 1 \in [0; 3]$ и $x = -1 \notin [0; 3]$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$y(1) = 2;\ \ y(0) = 0;\ y(3) = -18$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{наиб}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{наим}(3) = -18$.

Пример 2.

Исследовать функцию $y=\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0,\ (x=1)$

   Область определения: $x\in(-\infty;\,1)\cup(1;\,\infty)$

2. Т.к. $x=1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty$$

Т.к. пределы равны ∞значит $x=1$ точка разрыва второго рода.
Следовательно, прямая $x=1$- вертикальная асимптота.

3. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y=f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

   1. Область определения симметрична относительно начала координат
   2. $f(-x)=f(x)\ \ (f(-x)=-f(x))$.

Если $y=f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x)=\frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2}=-\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.
Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с OX: $y=0$ при $x=-2$;

с OY: $x=0$ при $y=2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y<0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}<0 \Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x\in(-\infty;\,-2);$$

$$y>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b,$ где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{4};$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4}x\right]=\left[\infty-\infty\right]=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2$$

$y=\dfrac{1}{4}x+2-$ наклонная асимптота.

Для $x\to-\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y=f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с "+" на "-" при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с "-" на "+" при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0, в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y=f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y'=\frac{3(x+2)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4}=\frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y'=0$ при $x_1=-2,\ x_2=7;$

y' не существует при $x=1$

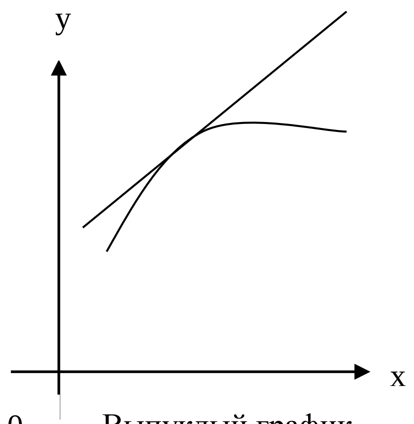
Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;7)$	7	$(7;+\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y	↗	0	↗	не существует	↘	≈ 5	↗
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

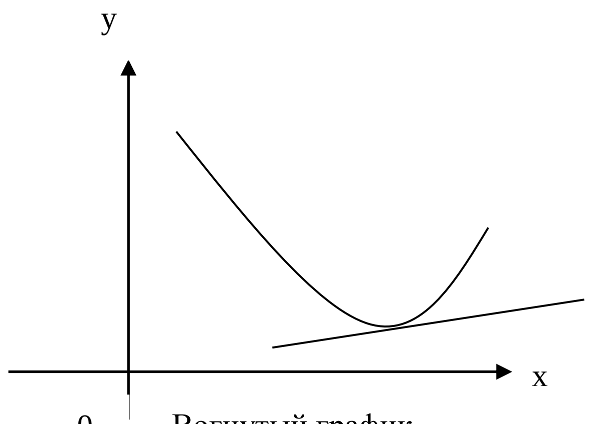
Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(7;+\infty)$ и убывает на интервале $(1;7)$. Точка $x=7$ есть точка минимума $y_{\min}=y(7)=\frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y=f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y=f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Выпуклый график



Вогнутый график

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y''<0$ на интервале $(a;b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y''>0$, то на интервале $(a;b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y=f(x)$:

$$y''=\frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3-3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6}=\frac{54(x+2)}{4(x-1)^4}=\frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$y''=0$ при $x=-2$

y'' не существует при $x=1$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	$+$	не существует	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2;\ 0)$- точка перегиба.

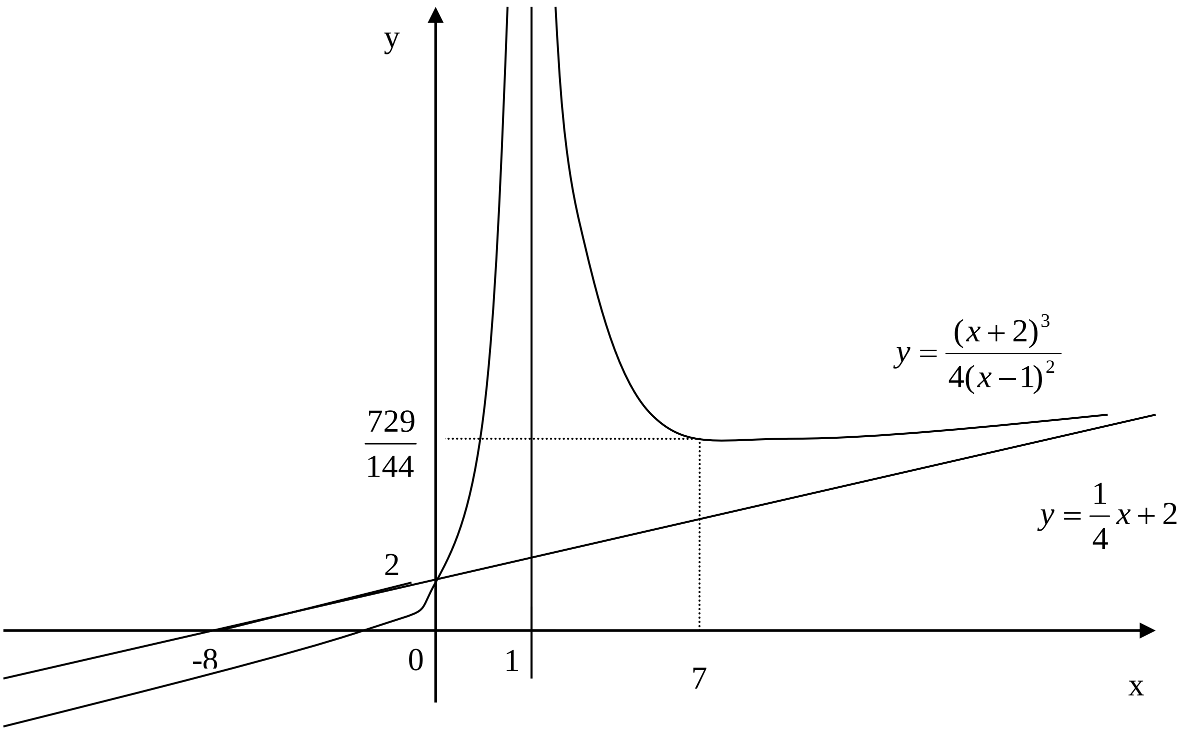
Дополнительные точки:

$y(-3) \approx -0{,}01$

$y(3) \approx 7{,}8$

$y(-6) \approx -0{,}3$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.