ТЕМА 7. Интегральное исчисление функции одной переменной.

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 4a $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

8 $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

9 $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3т.-5-е изд., стер. - М.: Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 509 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003. - 432 с.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд.-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int\left(x^5+\dfrac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$**;** б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$; в) $\int\dfrac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

г) $\int 3^{2-7x}dx$; д) $\int\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx$;

ж) $\int\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$; з) $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$; и) $\int\dfrac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;

к) $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx$; л) $\int\dfrac{3^x}{9^x+4}dx$; м) $\int x^2\cdot\cos x\, dx$;

н) $\int\arccos x\, dx$; о) $\int\dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$; п) $\int\dfrac{x^6}{x^2-x+1}dx$;

р) $\int\dfrac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$; с) $\int\dfrac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$; т) $\int\cos 3x\cos 5x dx$;

у) $\int\sin^4 x\, dx$; ф) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l}t=1+2x;\\ dt=2dx;\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

в) $$\int\frac{x^4}{\sin^2x^5}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^5\\ dt=5x^4dx\\ x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

г) $$\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{array}{l}t=2-7x,\\ dt=-7dx,\\ dx=-\frac{1}{7}dt\end{array}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^t dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

д) $$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{arctg}x\\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{array}\right|=\int tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C;$$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \sin t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C;$$

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$$= \ln\left|\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + t\right| + C = \ln\left|\sqrt{e^{2x} - 7} + e^x\right| + C;$$

и) $\int \frac{\sin 5x\ dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{matrix} t = \cos 5x \\ dt = -5\sin 5x\, dx \\ \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9 - t^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2 - 3^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3}\right| + C = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3}\right| + C;$$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| + C;$$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2} + C;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U\cdot V'dx = U\cdot V - \int U'\cdot Vdx$ (**13**):

м) $\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x\cdot \sin x dx =$

$= \left| \begin{array}{ll} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{array} \right| == x^2\cdot \sin x - \left(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$

н) $\int \arccos x\, dx = \left| \begin{array}{ll} U = \arccos x; & U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; & V = x \end{array} \right| = x\cdot \arccos x - \int x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \\ -xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$

в итоге получаем $\int \arccos x\, dx = x\cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx.$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$

$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$

$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx.$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} x^2:\ 1 = A + B + C \\ x^1:\ \ 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0:\ 6 = 6A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - 8\int\frac{dx}{x-2} + 8\int\frac{dx}{x-3} =:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$= \ln|x| - 8\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + C;$$

п) $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right)dx = \int x^4dx + \int x^3dx - \int xdx - \int 1dx + \int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдем с помощью формулы (**7**)}

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

р) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ \ \sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg}t,\ x = 2\operatorname{arctg}t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)} = \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3} =$$

$$= \frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2 = At^2-4At+3A+Bt^2-3Bt+Ct^2-Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &t^2: \ 1 = A+B+C \\ &t^1: \ \ 0 = -4A-3B-C \\ &t^0: \ 1 = 3A \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)} = \dfrac{1}{3t}-\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$= \frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

c) $\displaystyle\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2-2 = t,\ dt = 6xdx,\ 3xdx = \dfrac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}} =$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{aligned} &t = z^4 \\ &dt = 4z^3dz \\ &z = \sqrt[4]{t} \end{aligned}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}} = 2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz = 2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz = 2\int\frac{z}{z+1}dz =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz = 2\int dz - 2\int\frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$= 2z-2\ln|z+1|+C = 2\sqrt[4]{3x^2-2}-2\ln\sqrt[4]{3x^2-2}+C;$$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}\left(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(-2x)+\cos 8x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 8x\right)$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (**6**), получим:

$$\int \frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(-\sin 8x\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin 2x\right)+C = -\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

у) $\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx = \left\{\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - 2\cdot\frac{1}{4}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx == \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**6**)}

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;\ ;$$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} =:$

$$\left|\begin{array}{l} t = \sqrt{e^{2x}-1}, \\ e^{2x} = t^2+1, \\ x = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right), \\ dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} t = x^2+4 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right| = \int\limits_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_4^{b} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$= \lim_{b\to\infty}\left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) == \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}-2\right) = \infty$$ - интеграл расходится.

б) Несобственный интеграл II рода.

$x = 4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$ - интеграл сходится.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

б) длину дуги кривой:

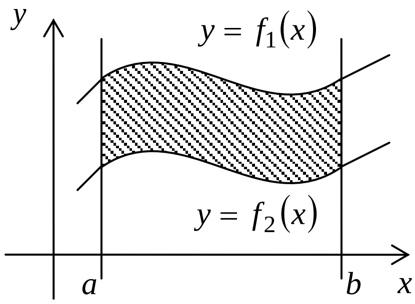
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi,$$

в) объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.

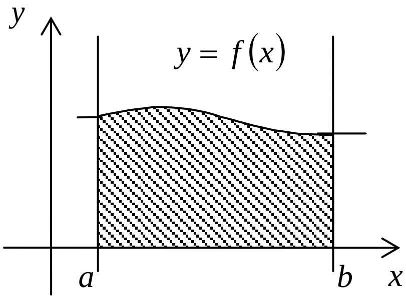
***Решение*:**

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

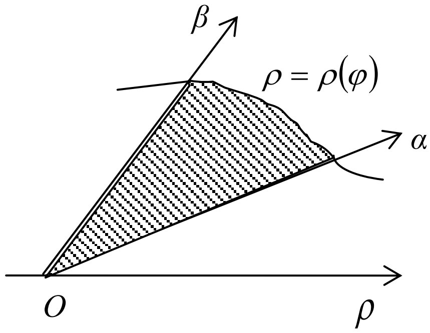
- Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой $S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ (**14**);



- Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $(y = f(x),\ x \in [a; b]) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$, определяется формулой $S = \int\limits_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt$ (**15**);

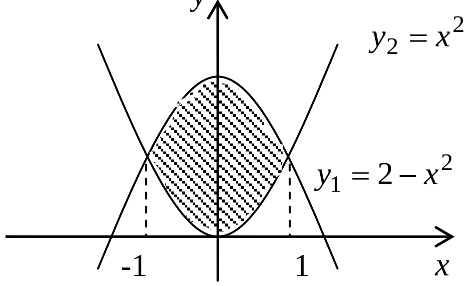


- Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой: $S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi$ (**16**).



В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (**14**).

Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$



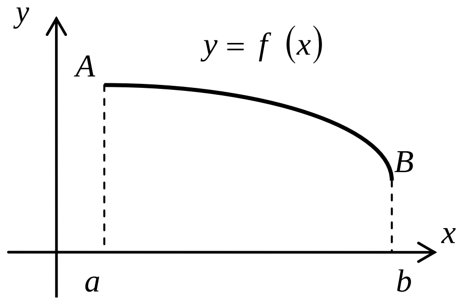
$x^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$

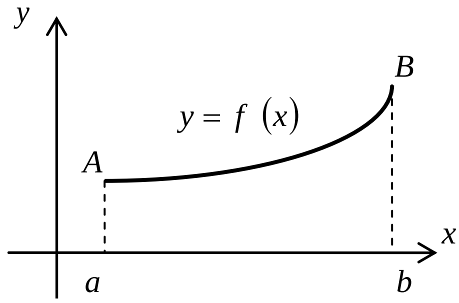
$$S = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(2 - x^2\right) - x^2 \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right) dx = 2 \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$

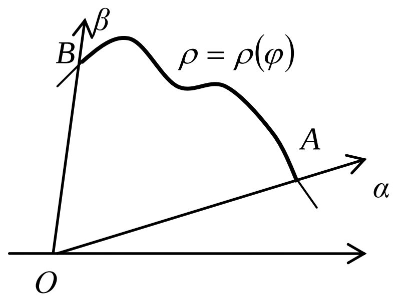
б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.



- Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a; b]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ (**17**);



- Для кривой, заданной параметрически уравнениями $(y = f(x),\ x \in [a; b]) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ (**18**);



- Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$ (**19**).

В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу (**18**).

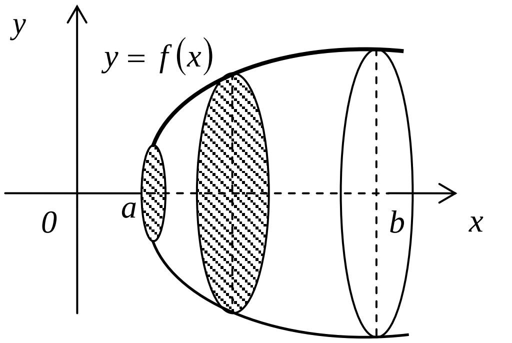
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 3(1 - \cos t), \\ y'(t) = 3 \cdot \sin t. \end{cases}$$

$$l = \int\limits_0^\pi \sqrt{(3(1-\cos t))^2 + (3\sin t)^2}\,dt = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \left\{\cos^2 t + \sin^2 t = 1\right\} =$$

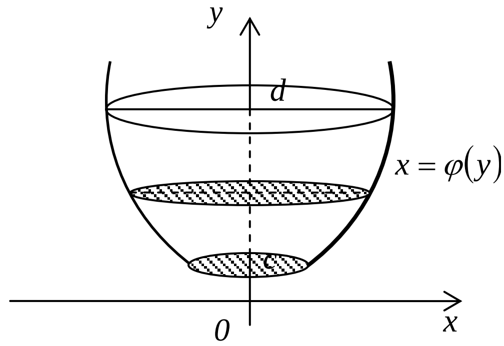
$$= 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = \left\{1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}\right\} = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt =$$

$$= 6\int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -6 \cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = -12\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -12 \cdot (0 - 1) = 12\,;$$

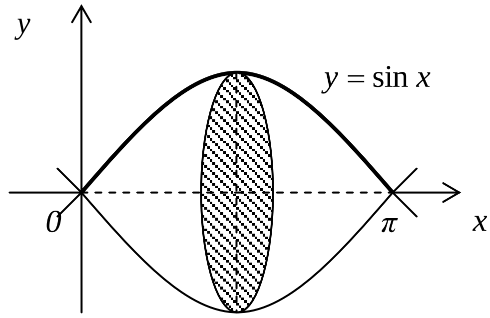
в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой: $V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$ (**20**).



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$ (**21**).



В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.



$$V_x = -\pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \right\} =$$

$$= \pi \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^\pi dx - \int\limits_0^1 \cos 2x\, dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$