ТЕМА 8. Кратные и криволинейные интегралы.

Элементы теории поля.

1. Двойные интегралы.
2. Тройные интегралы.
3. Криволинейные интегралы.
4. Теория поля.

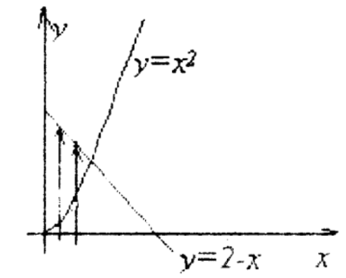
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс.Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

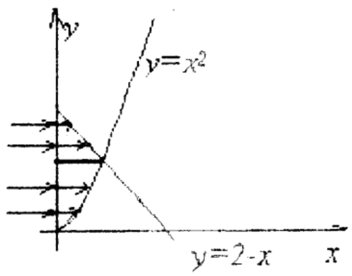
Задача 8.1. Записать двойной интеграл в виде повторного и изменить порядок интегрирования, если область интегрирования $D: y = x^2;\ y = 2 - x;\ x \geq 0$.

Решение. Область интегрирования *D* является правильной (простой) в направлении оси *ОУ*, т.к. любая прямая, параллельная оси *ОУ*, пересекает границу области *D* не более чем двух точках. Первую точку пересечения с линией ***y=x²*** назовем точкой входа, а линию - линией входа, ее уравнение ***y=x²*.** Вторую точку пересечения с линией ***y=2-x*** назовем точкой выхода, а линию – линией выхода. Тогда повторный интеграл в правой части составлен из двух определенных: первый берется по переменному **y,** оси которого *ОУ* параллельны секущие прямые, он называется внутренним. Пределы интегрирования в нем зависят от ***x*** и совпадают с ординатами точек пересечения секущих с линией входа (нижний предел) и линией выхода (верхний предел интегрирования). При внутреннем интегрировании переменное ***x*** считается постоянным, поэтому его результатом является функция, которая после подстановки пределов интегрирования зависит от $\boldsymbol{x}$. Второй интеграл по $\boldsymbol{x}$ берется от этой функции по переменному $\boldsymbol{x}$, а пределы интегрирования в нем равны наименьшему (для нижнего) и наибольшему (для верхнего) значению проекций точек области D на ось OX:



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$$

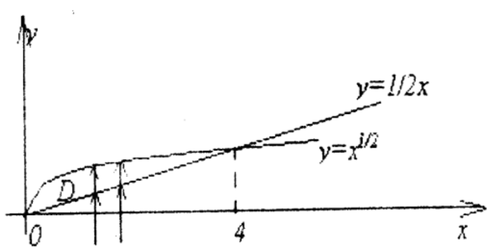
При изменении порядка интегрирования линия входа в область D имеет уравнение $\boldsymbol{x=0}$, а линия выхода разбивается на две части, одна из которых имеет уравнение $õ = \sqrt{ó}$, а вторая – уравнение $õ = 2 - ó$. По свойству аддитивности двойного интеграла он разбивается на два, в каждом их которых сделана замена на повторный с внутренним интегрированием по переменному $\boldsymbol{x}$, а внешним интегрированием по переменному $\boldsymbol{y}$:



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$$

Задача 8.2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной графиками данных функций

$$\iint\limits_D \left(x^2 - xy\right)dxdy; \quad y = \sqrt{x};\ y = \frac{1}{2}x.$$



Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси ОУ, поэтому заменяем двойной интеграл повторным с внутренним интегралом по $\boldsymbol{y}$, а внешним – по $\boldsymbol{x}$. Линией входа в D является прямая $\acute{o} = \frac{1}{2}\tilde{o}$, линией выхода – парабола $\acute{o} = \sqrt{\tilde{o}}$. Вычисляем внутренний интеграл при постоянном ***x***, применяя формулу Ньютона-Лейбница с нижним пределом $\frac{1}{2}\tilde{o}$ и верхним пределом $\sqrt{\tilde{o}}.$ Находим точки пересечения параболы и прямой из решения системы

$$\begin{matrix} \acute{o} = \sqrt{\tilde{o}} \\ \acute{o} = \frac{1}{2}\tilde{o} \end{matrix} \qquad \sqrt{\tilde{o}} = \frac{1}{2}\tilde{o}, \quad \tilde{o}^2 - 4\tilde{o} = 0, \qquad \tilde{o}_1 = 0, \quad \tilde{o}_2 = 4$$

Полученные абсциссы точек пересечения и дают пределы интегрирования во внутреннем интеграле.

Процесс сведения двойного интеграла к двухкратному сводится к следующему:

$$\iint\limits_D \left(x^2 - xy\right)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} \left(x^2 - xy\right)dy = \int_0^4 \left.\left(x^2 y - x\frac{y^2}{2}\right)\right|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^4 \left(x^2\sqrt{x} - x\frac{x}{2} - \left(x^2\frac{1}{2}x - x\frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2\right)\right)dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^3\right)dx =$$

$$\left.\left(\frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{32}x^4\right)\right|_0^4 dx = \frac{2}{7}128 - \frac{1}{6}64 - \frac{3}{32}256 = \frac{40}{21}.$$

Задача 8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных координат к полярным:

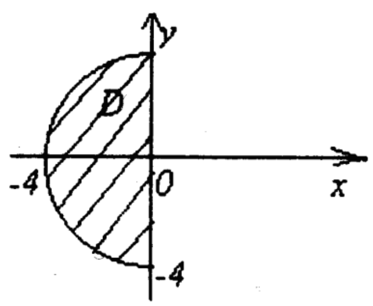
$$\int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{2y - 3x}{x^2 + y^2} dy.$$

Решение. Найдем границы области интегрирования в декартовых координатах.

Преобразуем $y = -\sqrt{16 - x^2}$: $\begin{cases} y^2 + x^2 = 16 \\ y \le 0 \end{cases}$

Преобразуем $y = \sqrt{16 - x^2}$: $\begin{cases} y^2 + x^2 = 16 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Изобразим область интегрирования:



Для расстановки пределов интегрирования в полярных координатах учтем, что область D – круговой сектор, ограниченный дугой окружности $\tilde{o}^2 + \acute{o}^2 - 16$, уравнение которой с учетом связи декартовых и полярных координат $\begin{array}{l} \tilde{o} = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}$ примет вид

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 16, \qquad \text{т.е.} \quad \rho = 4.$$

D ограничена также лучами $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\grave{e}$ $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Поэтому требуемый интеграл I в полярных координатах получится из исходного с помощью связи декартовых и полярных координат и домножения на ρ подынтегральной функции внутреннего интеграла по ρ, учитывающего искажение элемента площади в полярных координатах. В других примерах для расстановки пределов интегрирования, использовать, по аналогии с декартовыми координатами, рассечение D лучами, выходящими из центра полярной системы координат. Если они пересекутся с границей D не более чем в двух точках, то эта область - правильная по ρ, и пределы в повторном интеграле с внутренним интегралом по ρ и внешним по φ расставляются аналогично расстановке по $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ в случае декартовых координат.

Процесс вычисления двухкратного интеграла в полярных координатах после замены пределов интегрирования и подинтегральных выражений сведется к следующему:

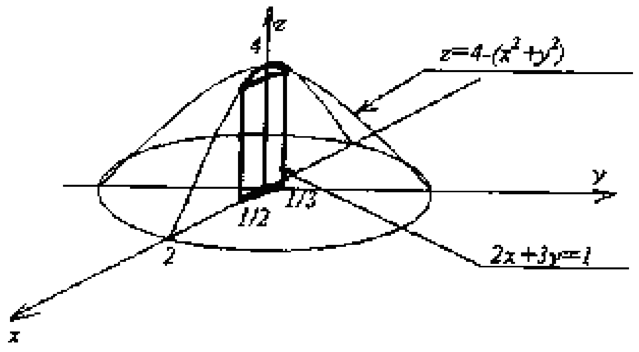
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 \frac{2\rho\sin\varphi - 3\rho\cos\varphi}{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 (2\sin\varphi - 3\cos\varphi) d\rho =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2\sin\varphi - 3\cos\varphi)\rho\Big|_0^4 d\varphi = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2\sin\varphi - 3\cos\varphi) d\varphi = 4(-2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 4\left(-3\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2}\right) = 24.$$

Задача 8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

$z = 4 - (x^2 + y^2)$; $\quad 2x + 3y = 1$; $\quad x \ge 0$; $\quad y \ge 0$; $\quad z \ge 0$.



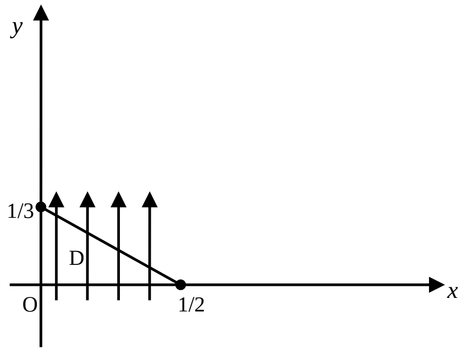
Решение. При сведении тройного интеграла к трехкратному и в расстановке пределов в каждом из трех определенных интегралов действуем по аналогии со случаем двойного интеграла. Область интегрирования V в примере считаем правильной в направлении оси OZ, т.к. любая прямая, параллельная оси OZ, пересекает границу области не более чем в двух точках. Учитывая, что объем области V выражается в декартовых координатах формулой

$$V = \iiint\limits_V dxdydz,$$

а область V ограничена снизу плоскостью z=0, а сверху – поверхностью параболоида вращения $z=4-(x^2+y^2)$ можно свести тройной интеграл к вычислению двойного интеграла от однократного:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z=0}^{z=4-\left(x^2+y^2\right)} dz \right) dxdy.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл по переменному z с нижним пределом z=0 и верхним пределом $z=4-(x^2+y^2)$. Областью интегрирования D во внешнем двойном интеграле является проекция тела V на плоскость XOY, имеющая вид:



Линия входа в эту область y=0, линия выхода $y = \frac{1}{3}(1-2x)$. Проекцией области D на ось OX служит отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Отсюда следует, что во внутреннем интеграле по y нижний предел 0, верхний предел $\frac{1}{3}(1-2\tilde{o})$, а во внутреннем интеграле по x нижний предел 0, а верхний предел $\frac{1}{2}$. В итоге объем V вычисляется с помощью трехкратного интеграла следующим образом:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} dy \int\limits_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} dz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} z\Big|_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} \left(4-\left(x^2+y^2\right)\right) dy =$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\left(4-x^2\right)y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}(1-2x)}dx=\int\left(\left(4-x^2\right)\frac{1}{3}(1-2x)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(1-2x)\right)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{81}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(107-210x-39x^2+62x^3\right)dx=\frac{1}{81}\left(107x-210\frac{x^2}{2}-39\frac{x^3}{3}+62\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{81}\left(107\frac{1}{2}-105\frac{1}{4}-13\frac{1}{8}+\frac{31}{2}\frac{1}{16}\right)=\frac{851}{2592}.$$

Задача 8.5. 1) Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода: $\int_L\left(x^3+y\right)dl,$ где $L: y=x^3; 0\le x\le 1.$

Решение. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла, причем способ такого сведения зависит от представления кривой интегрирования L. Если L задана уравнением $y=\varphi(x),\ a\le x\le b,$ где функция $y=\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ для $\tilde{o}\in[\grave{a},b]$, то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\left(\varphi'(x)^2\right)}dx$$

Если L задана параметрически: $\tilde{o}=\tilde{o}(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ где функции $x(t)$ $\grave{e}$ $y(t)$ имеют непрерывные производные $\tilde{o}'(t),\ \ y'(t)$, для $x\in[\alpha,\beta]$ то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Если L задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$ и функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ для $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

В рассмотренном примере используется явное задание кривой L уравнением $y=x^3$. Поэтому, используя первый способ сведения интеграла по длине дуги к определенному, получим:

$$\int_L\left(x^3+y\right)dl=\int_0^1\left(x^3+x^3\right)\sqrt{1+\left(\left(x^3\right)'\right)^2}\,dx=2\int_0^1\left(x^3+y\right)dl\sqrt{1+\left(\left(x^3\right)'\right)^2}\,dx=$$

$$=2\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx=\left|\begin{array}{l}t^2=1+9x^4\\ 2tdt=36x^3dx\\ x_1=0\Rightarrow t=1\\ x_2=1\Rightarrow t=\sqrt{10}\end{array}\right|=$$

$$2\int_1^{\sqrt{10}}\frac{1}{18}t\sqrt{t^2}\,dt=\frac{1}{9}\int_1^{\sqrt{10}}t^2dt=\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{10}}=\frac{1}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right).$$

2) Вычислить работу силы $\bar{F} = x^2\bar{i} + (x-y)\bar{j}$ при перемещении материальной точки по кривой $y = x^2$ от точки *A(0;0)* до точки *B(1;1)*.

Решение. Работа переменной силы $\vec{F}(P(x,y), Q(x,y))$ по перемещению материальной точки по плоской кривой L с уравнением $y = \varphi(x)$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по координатам

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

который сводится к определенному интегралу с учетом способа задания кривой L. В приведенном примере кривая L задана явно уравнением $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. Поэтому, по аналогии с переходом к определенному интегралу в предыдущем примере, достаточно заменить:

$y = x^2$, $dy = 2xdx$. Получим:

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L x^2dx + (x-y)dy = \int_0^1 x^2dx + (x-x^2)2xdx =$$

$$= \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)dx = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 8.6. а) Вычислить площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4y$ и плоскостью $x = 0$, $x \ge 0$, $z \ge 0$

Решение. Область D является кругом (рис.2), поэтому решаем задачу в полярных координатах. Тогда

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} =$$

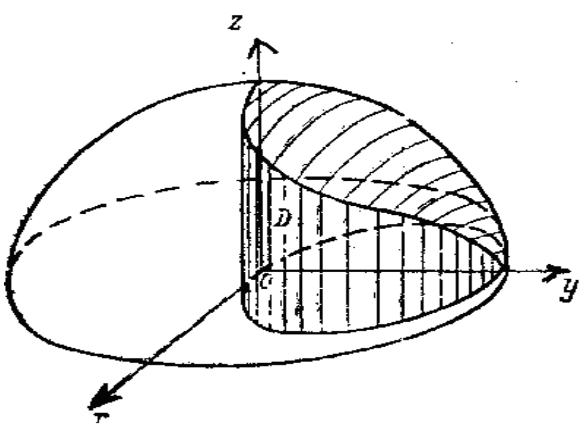
$$= \frac{4}{\sqrt{16 - z^2}}.$$

Элемент площади плоской области dS выражается в полярных координатах в виде: $dS = \rho d\rho d\varphi$. Полярное уравнение окружности, ограничивающей область интегрирования, будет иметь вид:

$\rho = 4\sin\varphi$. Так как область интегрирования содержит начало полярной системы точку O на своей границе, то вычисляем площадь поверхности σ с помощью поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\sigma = \iint_\sigma 1 \cdot d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dS = \iint_D \frac{4}{\sqrt{16 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{16 - \rho^2}} = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{16 - \rho^2}\,\Big|_0^{4\sin\varphi}\right) d\varphi$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi)d\varphi = 8(\pi - 2)$$



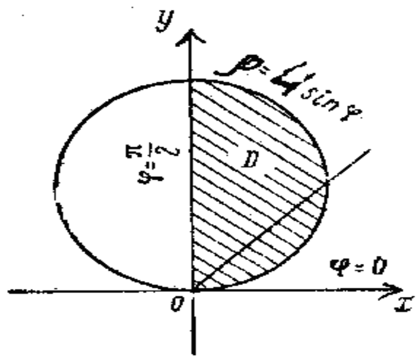


Рис. 1 Рис. 2

б) Найти поверхностный интеграл 2-го рода $I=\iint\limits_{\sigma} z^2dydz+xzdydz+ydxdy,$ где замкнутая поверхность σ состоит из внешней стороны части поверхности параболоида $\sigma_1: x^2+y^2=4-z,\quad z\ge 0,$ а также из части плоскости $\sigma_2: z=0.$

Решение. Применяем формулу Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу 2-го рода *I*:

.
$$I=\iint\limits_{\sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

В векторной форме формула Остроградского-Гаусса имеет вид:

$$Ï=\iint\limits_{\sigma}\vec{a}_n d\sigma=\iiint\limits_{V} div\vec{a}dV,$$

где в левой части – поток П векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $\sigma,$ а

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Но тогда $I=\iiint\limits_{V} div\vec{a}\,(M)dV,$ где векторное поле $\vec{a}\,(M)$ имеет вид:

$\vec{a}=(M)=z^2\vec{i}+xz\vec{j}+y\vec{k}.$ Но $div\vec{a}(M)=\dfrac{\partial z^2}{\partial x}+\dfrac{\partial (xz)}{\partial y}+\dfrac{\partial y^2}{\partial z}=0.$

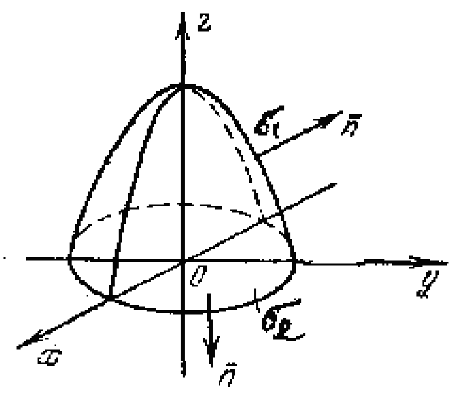


Рис. 3.

Следовательно, $I = \iiint\limits_V 0 dV = 0.$

Задача 8.7. а) Найти координаты центра тяжести плоской однородной пластины D, ограниченной линиями $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0$

Решение. Считаем плотность однородной пластины $\rho = 1.$ Тогда ее статические моменты относительно осей ОХ и ОУ определяются формулами: $M_x = \iint\limits_D y dS, \quad M_y = \iint\limits_D x dS$, а координаты ее центра тяжести $\tilde{N}(x_c; y_c)$

определяются формулами: $x_c = \dfrac{M_y}{m}, \quad y_c = \dfrac{M_x}{m}$, где $m = \iint\limits_D 1 \cdot dS$ - масса однородной пластины D с плотностью $\rho = 1.$ Применяя эти формулы, получаем:

$$M_x = \iint\limits_D y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} y dy = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4 dx = \frac{16}{5}, \qquad M_y = \iint\limits_D x dx dy = \int_0^2 x dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^2 x^3 dx = 4,$$

$$m = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3.} \quad \text{Тогда} \quad x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{2}, \quad y_c = \frac{M_y}{m} = \frac{6}{5}.$$

б) Доказать, что работа силы $\vec{F} = \left(\dfrac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right)\vec{j}$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из $M_1(0,0)$ в $M_2(1,1).$

Решение. Проверяем условие, достаточное для того, чтобы работа силы $\vec{F}$ по перемещению точки по дуге $\cup M_1 M_2$ не зависела от формы пути:

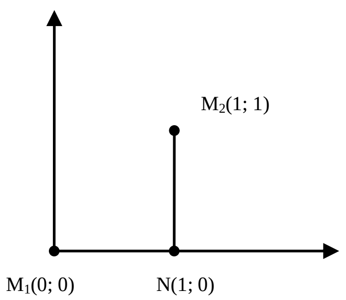
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2}, \text{ то есть } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При этом функции $P(x, y), \ Q(x, y), \ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y), \ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ непрерывны в любой односвязной области D, содержащей $\cup M_1 M_2$

Тогда, для вычисления работы $\text{A} = \int\limits_{\ddot{A}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ находим криволинейный интеграл 2-го рода

$A = \int\limits_{\cup M_1 M_2} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)dy.$ В силу независимости этого интеграла от пути интегрирования вычислим его вдоль ломаной M_1NM_2, где точка $N(1,0)$:



Тогда $A = \int\limits_{M_1N} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)dy + \int\limits_{NM_2} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)dy =$

$$= \int_0^1 (-1)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - 10\right)dy = -x\Big|_0^1 + (arctgy - 10y)\Big|_0^1 = -1 + arctg1 - 10 = \frac{\pi}{4} - 11$$

При вычислении криволинейного интеграла 2-го рода по M_1N x меняется от 0 до 1, $y = 0,$ $dy = 0,$ а при вычислении аналогичного интеграла по NM_2 $x = 1,$ $dx = 0,$ а y меняется от 0 до 1.

Задача 8.8 а) Найти величину и направление наибольшего изменения поля $U(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Решение. Доказано (см. [1], [2], [5], [6]), что скалярное поле U(M) имеет в данной точке M_0 максимальную производную по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)$, которая равна модулю градиента поля U в этой точке:

$$\max \frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = |gradU(M_0)|,$$

если за вектор $\vec{l}$, указывающий направление дифференцирования, взять направление вектора $gradU(M_0)$. Поэтому в задаче требуется найти сам вектор

$$gradU(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\vec{k}.$$

Приведем соответствующие вычисления:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M) = 10xyz - 7y^2z + 5yz^2, \qquad \frac{\partial U}{\partial x}(M_0) = 10 - 7 + 5 = 8,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(M) = 5x^2z - 14xyz + 5xz^2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(M_0) = 5 - 14 + 5 = -4,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(M) = 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz, \qquad \frac{\partial U}{\partial z}(M_0) = 5 - 7 + 10 = 8,$$

$$gradU(M_0)=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial gradU}(M_0)=\max\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)=|gradU(M_0)|=\sqrt{8^2+(-4)^2+8^2}=12$$

б) Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$– потенциально, если в каждой точке М из области определения поля $rot\ \vec{a}\ (M)=\vec{0}.$ Находим

$$rot\ \vec{a}\ (M)=[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ в каждой точке М области V удовлетворяет условию

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)=0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $rot\vec{a}(M)=\vec{0}$ и $div\vec{a}(M)=0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=0.$ Тогда

$rot\,\vec{a}\,(M)=(0-1)\vec{i}+(0-2)\vec{j}+(0-1)\vec{k}=-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\neq\vec{0},$ следовательно, поле $\vec{a}\,(M)$ не является потенциальным.