ТЕМА 9. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков.
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. - СПб.: Иван Федоров, 2003. - 287 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: Учеб. для вузов. - 8-е изд., стер. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 486 с.
3. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие. - 7-е изд., доп. - СПб.: Лань, 2002. - 431 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с. Т.2.- 2002.- 544 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy+y)dx+(xy+x)dy=0$.

Решение. Попытаемся разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx+x(y+1)dy=0$, разнесем слагаемые: $y(x+1)dx=-x(y+1)dy$; выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения убедимся в том, что $\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным: $\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Получим $\ln|x|+x=-\ln|y|-y+\ln C$, $\Rightarrow \ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y}=C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y}=C$.

б) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

Решение. Убедимся в том, что переменные разделить не удается. Поэтому поделим обе части уравнения на *x*.

$y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ - Убедимся в том, что производная $\frac{dy}{dx}$ в представленном уравнении зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, то есть $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ и, значит, это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Будем решать его с помощью соответствующей замены.

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = U;\quad y' = U'x + U$.

$U'x + U = \sin U + U$;

$U'x = \sin U$;

$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x}$; проинтегрируем выражение

$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x}$;

$\ln\left|tg\frac{U}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$;

$\left|tg\frac{U}{2}\right| = |x|C$;

$\left|tg\frac{y}{2x}\right| = |x|C$;

$y = 2x \cdot arctgxC$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = 2x \cdot arctgxC$.

в) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Начинаем вновь с проверки не разделятся ли переменные интегрирования. Убеждаемся, что это не так, и, кроме того, однородным оно тоже не является. Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, так как имеет структуру вида: $P(x)y' + Q(x)y = F(x)$. Будем решать его с помощью стандартной в этом случае, замены: $y = UV; \Rightarrow \quad y' = U'V + V'U$.

$U'V + V'U + UVtgx = \frac{1}{\cos x}$;

$U'V + U(V' + Vtgx) = \frac{1}{\cos x}$;

$V' + Vtgx = 0$;

$\frac{dV}{V} = -tgxdx$;

$\ln|V| = \ln|\cos x|$;

$|V| = |\cos x|$;

$U'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$;

$dU = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$;

$U = tgx + C$;

$y = \cos x(tgx + C)$- общее решение уравнения.

Ответ: $y = \cos x(tgx + C)$.

Задание 2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}; y(0) = 1; y'(0) = 1$.

Решение. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ - неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 2-ого порядка. Решение будем искать в виде суммы решений: общего решения однородного уравнения $\bar{y}$ и частного решения неоднородного уравнения y^*, которое будем искать по виду правой части. Начнем с отыскания $\bar{y}$.

$y'' + 2y' - 3 = 0$ Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k - 3 = 0; \quad k_1 = 1; k_2 = -3$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения: $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-3x}$.

y^* будем искать в виде $A \cdot e^{2x}$. y^*- частное решение уравнения, поэтому оно превращает его в верное числовое тождество. Подставим его в уравнение и вычислим A. $\left(y^*\right)' = 2Ae^{2x}; \left(y^*\right)'' = 4Ae^{2x}$.

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 0{,}2$. Значит $y^* = 0{,}2e^{2x}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-3x} + 0{,}2e^{2x}$. Для вычисления частного решения определим значения констант исходя из начальных условий:

$y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + 0{,}2e^{2x}$; $y' = C_1e^x - 3C_2e^{-3x} + 0{,}4e^{2x}$; $y(0) = 1; y'(0) = 1$;

$1 = C_1e^0 + C_2e^{-3*0} + 0{,}2e^{2*0}$; $1 = C_1e^0 - 3C_2e^{-3*0} + 0{,}4e^{2*0}$;

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 0{,}2 \\ 1 = C_1 - 3C_2 + 0{,}4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.75 \\ C_2 = 0.05 \end{cases}$$

Ответ: $y = 0.75e^x + 0.05e^{-3x} + 0{,}2e^{2x}$.

Задание 3. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$.

Решение. Сведем предложенную систему к одному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение системы по *t:*

$x'' = -7x' + y'$ и заменим y' воспользовавшись для этого вторым уравнением системы:

$x'' = -7x' - 2x - 5y, \quad y = x' + 7x$. Окончательно $x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x)$.

$x'' + 12x' + 37x = 0$ - однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 12k + 27 = 0; \quad k_{1,2} = -6 \pm i$.

Следовательно, решение: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Из первого уравнения $y = x' + 7x$, поэтому

$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$;

$y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Ответ: $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$; $y = e^{-6t}(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$.

Задание 4. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0,1)$, для которой треугольник, образованный осью *Oy*, касательной к кривой в произвольной её точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси *Oy*).

Решение. Пусть $f(x)$ искомое уравнение кривой. Проведем касательную *MN* в произвольной точке *M(x;y)* кривой до пересечения с осью *Oy* в точке *N*. Согласно условию, должно выполняться равенство $|ON| = |OM|$, но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|ON|$ найдем из уравнения $Y - y = y'(X - x)$, полагая *X=0*, то есть $y = |ON| = y - xy'$.

Итак, приходим к однородному уравнению $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$.

Полагая *y=tx* (*y'=t'x+t*), получим $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x}$ или $\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \ln C - \ln x$, откуда $x^2 = C(C - 2y)$ – данное решение представляет собой семейство парабол, осью которых является ось *Oy*.

Определим значение константы C исходя из того, что кривая проходит через точку $A(0,1)$. Подставляя координаты заданной точки в вышенайденное общее решение, получим $0 = C(C-2)$; из двух значений *C=0* и *C=2* нас устраивает лишь второе, так как при *C=0* парабола оказывается вырожденной. Итак, искомое решение $x^2 = 2(2 - 2y) = 4(1 - y)$, или $y = 1 - x^2/4$.

Ответ: $y = 1 - x^2/4$.

Задание 5.

а) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Решение. Так как производная в данном случае является функцией, зависящей только от переменной *x*, то его решение может быть получено в результате последовательного интегрирования: $y'' = x^2 \Rightarrow y' = x^3/3 + C_1 \Rightarrow y = x^4/12 + C_1 x + C_2$.

Ответ. $y = x^4/12 + C_1 x + C_2$.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = (y')^2$.

Решение. Поскольку данное уравнение не содержит в явном виде переменной y, то замена $y' = p(x)$ $y'' = p'(x)$ позволяет преобразовать его в уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $xp' + p = p^2$.

$x\dfrac{dp}{dx} = p^2 - p, \quad \dfrac{dp}{p^2 - p} = \dfrac{dx}{x},$

$\displaystyle\int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{p - 0,5 - 0,5}{p - 0,5 + 0,5}\right| = \ln x + \ln C_1 = \ln C_1 x$;

$p(1 - C_1 x) = 1, \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 - C_1 x}, \quad y = -\dfrac{1}{C_1}\ln\left|x - \dfrac{1}{C_1}\right| + C_2$. Учтя, что C_1 – произвольная постоянная, то полученное решение можно упростить: $y = C_1 \ln|x + C_1| + C_2$.

Ответ. $y = C_1 \ln|x + C_1| + C_2$.

в) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = (y')^2$.

Решение. Так как решаемое уравнение не содержит явно переменной x, будем получать его решение с помощью введения новой переменной $y' = p(y)$, откуда $y'' = p'_y p$, так как в этом случае мы вычисляем производную сложной функции. Заданное уравнение в результате такой замены будет иметь вид: $p'_y p = p^2$. Решение $p = 0$ является особым, и, делая обратную замену в этой ситуации, запишем: $y' = 0 \Rightarrow y = C = const$. Оставшееся уравнение $p'_y = p$ является уравнением в разделяющихся переменных: $p'_y = p \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = p \Rightarrow \dfrac{dp}{p} = dy$. Интегрируя последнее равенство, получим $\ln p = y + C_1$. Выразим теперь функцию p: $p = e^{y + C_1} = e^y e^{C_1} = e^y C_1$. Делая вновь обратную замену $y' = p(y)$, получим: $y' = e^y C_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^y C_1$. В данном уравнении можно разделить переменные: $\dfrac{dy}{dx} = e^y C_1 \Rightarrow e^{-y} dy = C_1 dx$. Интегрируя последнее выражение, получим $-e^{-y} = Cx + C_1$. Получившаяся неявная функция также является решением заданного дифференциального уравнения.

Ответ. $y = C = const$; $e^{-y} = C_1 x + C_2$.

Задание 6. Решить уравнение $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

Решение. Правая часть уравнения представляет собой дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Выпишем общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y' = 0$. Так как корнями соответствующего характеристического уравнения $k^2 - k = 0$ являются числа $k = 0, k = 1$, то общее решение данного уравнения, как известно, имеет вид $\bar{y} = C_1 e^x + C_2$. Правая часть исходного уравнения $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ не позволяет найти частное решение y^* неоднородного уравнения методом подбора (или неопределенных коэффициентов) поэтому воспользуемся для его нахождения методом вариации произвольных постоянных. Поэтому будем искать частное решение y^* в виде: $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, предполагая, что здесь $y_1 = 1$ и $y_2 = e^x$ (мы воспользовались видом найденной фундаментальной системы решений однородного уравнения), а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \text{ таким образом } \begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' e^x = 0 \\ C_1' \cdot 0 + C_2' e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \end{cases}.$$

Из второго уравнения выпишем $C_2'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Проинтегрировав, получим $C_2(x) = \int \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsin e^x$ (постоянную интегрирования будем полагать равной нулю). Теперь, подставляя значение $C_2(x)$ в первое уравнение системы, получим дифференциальное уравнение для функции $C_1(x)$: $C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot e^x = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Вновь интегрируя, запишем: $C_1(x) = -\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \sqrt{1-e^{2x}}$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид $y^* = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x) \cdot e^x = \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$, выпишем общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \cdot \arcsin e^x$.